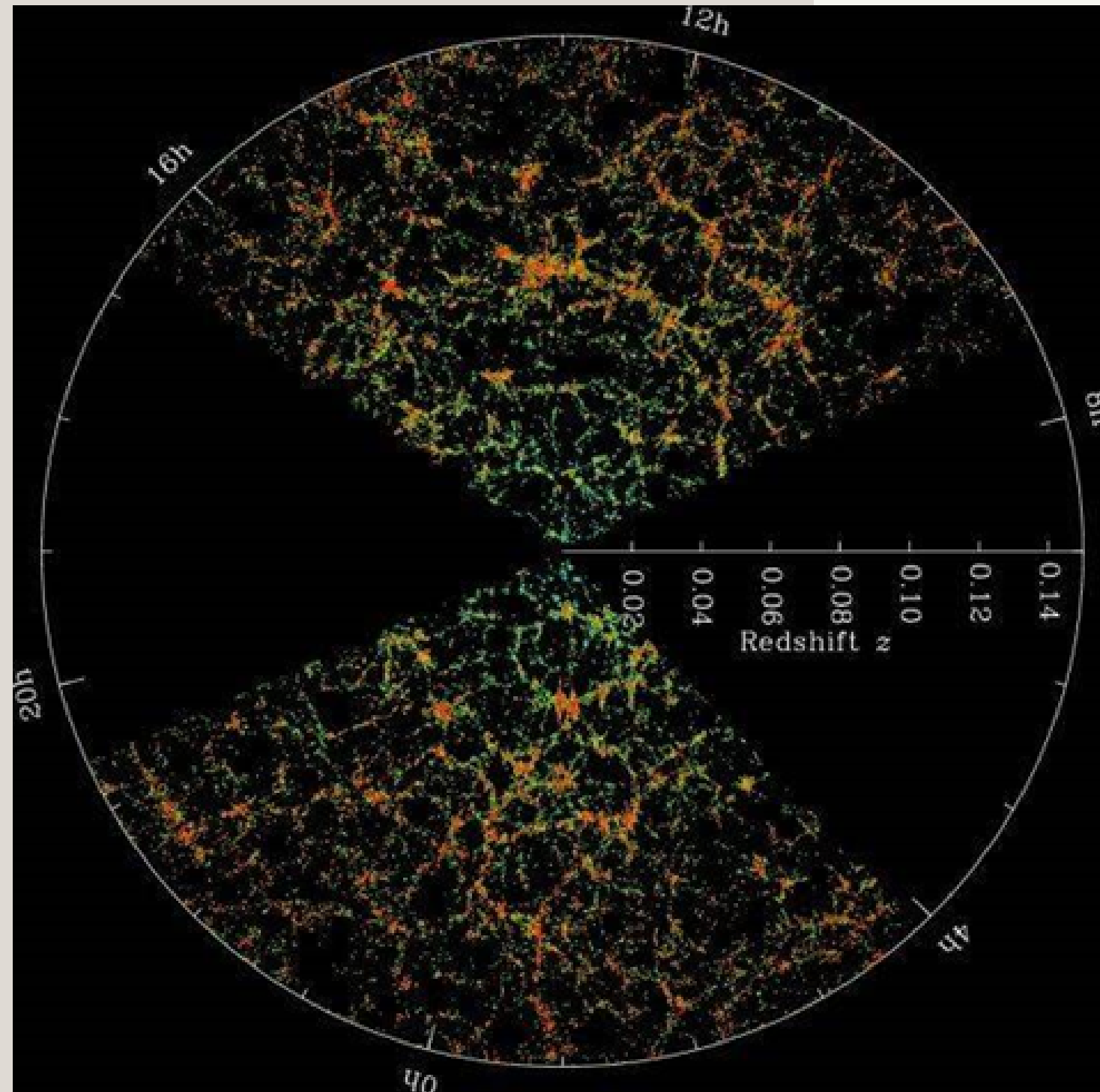




Universidad
Industrial de
Santander



Sobre la no metricidad, la torsión, y la invarianza de gauge en la formulación de la ecuación de campo gravitacional como una ecuación de estado y en las leyes de la termodinámica de los agujeros negros

Autor: Jhan Nicolás Martínez Lobo
Director: Yeinzon Rodríguez García
Co-Director: José Fernando Rodríguez

— Introducción

Gauge

Termodinámica

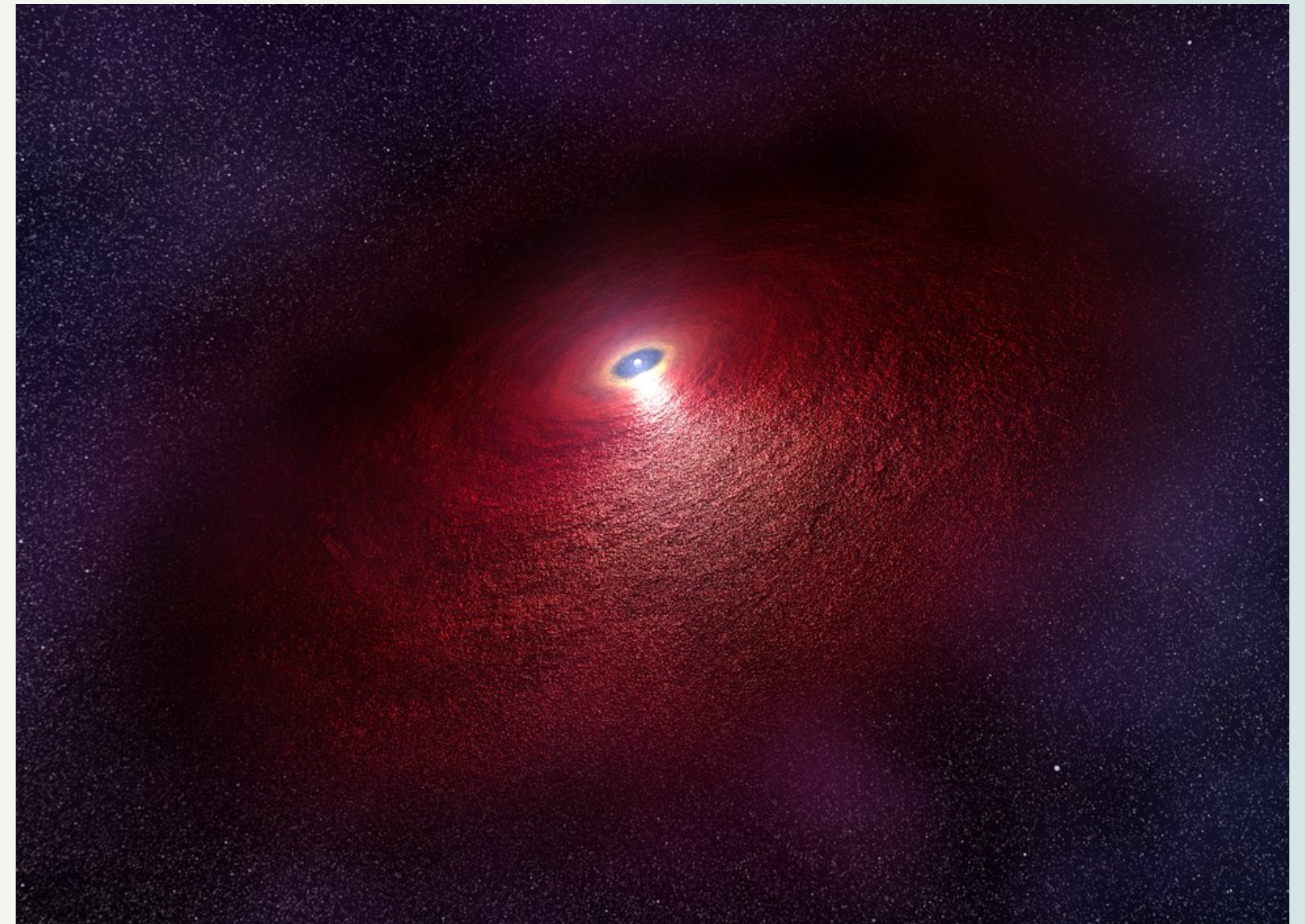
Teoría de la gravedad
 $R_{\alpha\beta\mu\nu}, T_{\alpha\mu\nu}, Q_{\alpha\mu\nu}$.

Lovelock

Leyes de los
agujeros negros

Contenido

1.Relatividad General: Revisión	03
2.Relatividad General: Razones para modificarse	18
3.Estado del arte	20
4.Planteamiento del problema	26
5.Objetivos	27
6.Metodología	30
7.Cronograma de actividades	36



I.R.G:Revisión

La métrica

$$g_{\mu\nu},$$

la comparación de tensores en diferentes puntos de la variedad requiere,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(g_{\mu\nu}), \Rightarrow R^{\lambda}_{\rho\mu\nu},$$

y las ecuación de campo de Einstein están dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu},$$

A. Einstein, A. der Wissenschaften, 1915.

I.R.G:Revisión

- Perihelio de mercurio, lentes gravitacionales,
C. M. Will, Cambridge University Press, 2018.
- Existencia y rapidez de ondas gravitacionales
B. P. Abbott et al., Astrophys. J., 2017.
- Sagittarius A*,
K. Akiyama et al., Astrophys. J., 2019.
- Λ CDM,
V. Mukhanov, Cambridge University Press, 2005.

I.I.RG:Lovelock

$$G_{\mu\nu} = 0$$

- 4 dimensiones,
- acoplamiento mínimo de la materia con la gravedad,
- ecuaciones cuando mucho de segundo orden en derivadas de la métrica,
- libre de divergencia.

1.2.RG:Gauge

$$h_k{}^\mu, A^{ij}{}_\mu,$$

Para transformaciones globales:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(\phi, \partial_k \phi),$$

$$\Rightarrow$$

Para transformaciones locales:

$$\tilde{\mathcal{L}}_M = b\mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k \phi),$$

$$\nabla_k \phi = h_k{}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \right) \phi,$$

1.2.RG:Gauge

Se definen los tensores de esfuerzos de Lorentz y de translación como:

$$F^{ij}_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A^{ij}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{ij}_{\mu} + A^i_{s\mu} A^{sj}_{\nu} - A^i_{s\nu} A^{sj}_{\mu},$$

$$F^s_{kl} = h_k^{\mu} h_l^{\nu} (\nabla_{\mu} b^s_{\nu} - \nabla_{\nu} b^s_{\mu}) \equiv h_k^{\mu} h_l^{\nu} F^s_{\mu\nu},$$

lo que da lugar a la teoría de Gauge de Poincaré:

$$\tilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_F(F^{ij}_{kl}, F^s_{kl}) + b\mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k \phi),$$

1.3. Leyes de la dinámica de los agujeros negros

Ley cero:

$$\kappa^2 \equiv -\frac{1}{2}\xi^{\alpha;\beta}\xi_{\alpha;\beta}, \quad \kappa_{;\alpha} = 0,$$

Primera Ley:

$$(M, J, A) \rightarrow (M + \delta M, J + \delta J, A + \delta A),$$

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H\delta J,$$

1.3. Leyes de la dinámica de los agujeros negros

Segunda Ley:

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} \kappa, \quad S = \frac{k_B A}{4\ell_P^2},$$

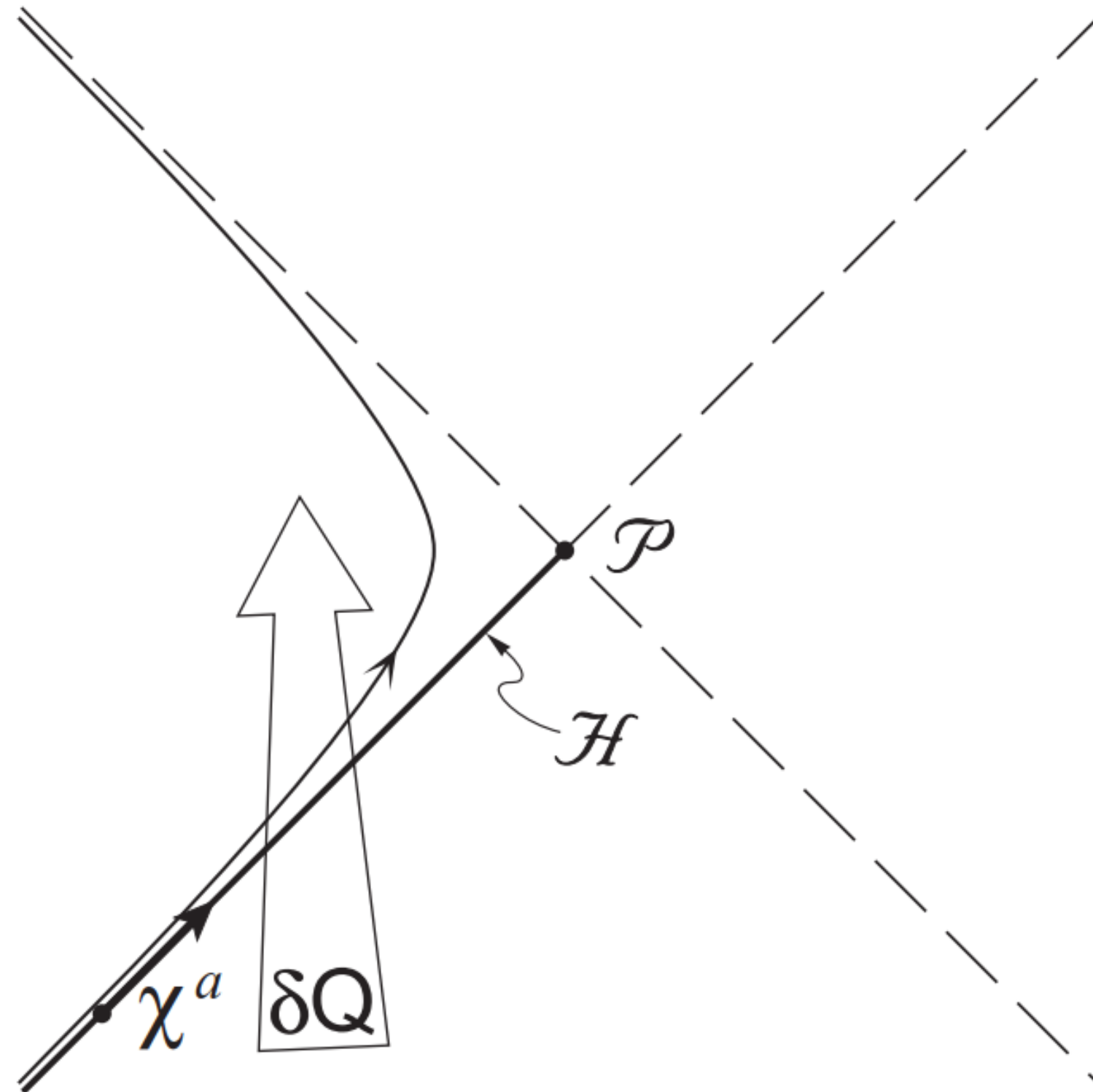
así entonces,

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S + \Delta S_M \geq 0,$$

S. W. Hawking, Nature, 1974.

J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D, 1974.

1.4.RG:Termodinámica



T. Jacobson, Phys. Rev. Lett., 1995.

1.4.1. Efecto Unruh

En el espaciotiempo de Minkowski los observadores acelerados miden un baño térmico con temperatura

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi},$$

siendo κ la aceleración.

1.4.2. Flujo de energía

$$\delta Q = \int_{\mathcal{H}} T_{\mu\nu} \chi^\mu d\Sigma^\nu,$$

$$\chi^\mu = -\kappa \lambda k^\mu, \quad d\Sigma^\mu = k^\mu d\lambda d\mathcal{A},$$

por lo tanto,

$$\delta Q = -\kappa \int_{\mathcal{H}} \lambda T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu d\lambda d\mathcal{A},$$

1.4.3. Entropía de un horizonte

$$dS = \eta \delta \mathcal{A},$$

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\mathcal{H}} \theta d\lambda d\mathcal{A},$$

usando la ecuación de Raychaudhuri,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu,$$

I.4.4. Variación del área

$$\theta = -\lambda R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu,$$

así entonces

$$\delta\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{H}} \lambda R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu d\lambda d\mathcal{A},$$

1.4.5. Relación de Clausius

$$\delta Q = T dS = \frac{\hbar \kappa}{2\pi} \eta \delta \mathcal{A},$$

$$\kappa \int_{\mathcal{H}} \lambda T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu d\lambda d\mathcal{A} = \frac{\hbar \kappa}{2\pi} \eta \int_{\mathcal{H}} \lambda R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu d\lambda d\mathcal{A},$$

pero, para un horizonte arbitrario:

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \frac{\hbar \eta}{2\pi} R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu, \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\hbar \eta} T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + f g_{\mu\nu},$$

1.4.6 Ecuación de campo

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \Rightarrow \quad f = -R/2 + \Lambda,$$

finalmente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{\hbar\eta} T_{\mu\nu},$$

en donde

$$\eta = \frac{1}{4\hbar G}, \quad \Rightarrow \quad \eta^{-1/2} = 2l_p,$$

1.4.7. ¿Ecuación de campo o ecuación de estado?

- Vista de esta manera, la Relatividad general es una ecuación de estado.
- Cuantizar canónicamente la ecuación de Einstein no sería apropiado ya que sería similar a intentar cuantizar la ecuación de onda para el sonido en el aire.
- La constante cosmológica permanece igual de enigmática.
- Las perturbaciones de alta frecuencia o gran amplitud del campo gravitacional podrían no verse descritas por la ecuación de Einstein debido a la pérdida de las condiciones de equilibrio local.
- La producción de entropía en la expansión libre de un gas no es descrita por la relación de Clausius.
- Las deformaciones de los cristales ideales pueden ser descritas mediante una métrica, pero los defectos locales, requieren estructuras como la torsión y la no metricidad para ser descritas.

T. Jacobson, Phys. Rev. D, 1995.

F. Falk, J. Elast., 1981.

R. Kupferman et. al., J. Geom. Mech., 2015.

R. Kupferman et. al., Isr. J. Math., 2017.

2.RG:Razones para modificarse

➤ Materia oscura: $25.89\% \pm 0.57\%$.

N. Aghanim et. al., Astron. Astrophys.,2020.

➤ Energía oscura: $69.11\% \pm 0.62\%$.

➤ Tensión de Hubble: $H_0 = (67.4 \pm 0.5)\text{km/s/Mpc}$,

$$H_0 = (73.52 \pm 1.62)\text{km/s/Mpc}.$$

A. G. Riess et al., Astrophys. J., 2018.

2.RG:Razones para modificarse

➤ Singularidades.

R. Penrose, Phys. Rev. Lett., 1965.

➤ Renormalizabilidad y unitariedad.

R. M. Wald, University of Chicago Press, 2010.
K. S. Stelle, Phys. Rev. D, 1977.

— 3.Estado del arte

	Lovelock	Gauge	Termodinámica
$g_{\mu\nu}$	R <small>D. Lovelock, J. Math. Phys., 1971.</small>	$R + \mathcal{O}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\right)$ <small>F. W. Hehl, Nato science series B, 1979.</small>	R <small>T. Jacobson, Phys. Rev. Lett., 1995.</small>

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

— 3.Estado del arte

	Lovelock	Gauge	Termodinámica
$g_{\mu\nu}$	R D. Lovelock, J. Math. Phys., 1971.	$R + \mathcal{O}\left(R_{\mu\nu\alpha\beta}^2\right)$ F. W. Hehl, Nato science series B, 1979.	R T. Jacobson, Phys. Rev. Lett., 1995.
$g_{\mu\nu}, T^\mu_{\alpha\beta}$	R A. Mardones et. al., Class Quant. Grav., 1991.	$R + \mathcal{O}\left(R_{\mu\nu\alpha\beta}^2, T_{\alpha\mu\nu}^2\right)$ F. W. Hehl, Nato science series B, 1979.	R T. De Lorenzo et. al., Phys. Rev. D., 2018.

$$\bar{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}^M + \left(\bar{\nabla}_\sigma + T_\sigma \right) \left(\tau^\sigma_{\mu\nu} - \tau_{\mu\nu}^\sigma - \tau_{\nu\mu}^\sigma \right) \right),$$

$$S^\sigma_{\mu\nu} = 16\pi G \tau^\sigma_{\mu\nu},$$

N. J. Poplawski, Astron. Rev., 2013.
 IM. Gasperini, Phys. Rev. Lett., 1986.
 A. Kasem et. al., Int. J. Mod. Phys. A, 2021.
 Y. Bonder, Int. J. Mod. Phys. D, 2016.
 B. A. Costa et. al., Phys. Lett. B, 2024.
 F. Cabral et. al., Class Quant. Grav., 2021.

3.1.MAG

$$\mathbf{R}^{1,3} \rtimes \mathbf{O}(1,3), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{1,3} \rtimes \mathbf{GL}(1,3),$$

el tensor de no metricidad está definido como

$$Q_{\mu\alpha\beta} \equiv -\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta},$$

y modifica el producto interno bajo transporte paralelo como

$$\partial_{\rho}(g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu}) = \nabla_{\rho}(g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu}) = -Q_{\rho\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu},$$

3.1.MAG

Supóngase una base y un comarco duales

$$\vartheta^a(\mathbf{e}_b) = \delta_b^a,$$

las cuales se pueden expresar como

$$\mathbf{e}_a = e^\mu{}_a \partial_\mu, \quad \vartheta^a = e_\mu{}^a dx^\mu,$$

y cuyos brackets de Lie

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = -\Omega_{ab}{}^c \mathbf{e}_c, \quad \Omega_{\mu\nu}{}^c \equiv 2\partial_{[\mu} e_{\nu]}{}^c,$$

3.1.MAG

En una base arbitraria

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = e_\nu{}^a e^\lambda{}_b \omega_{\mu a}{}^b + e^\lambda{}_a \partial_\mu e_\nu{}^a,$$

en donde

$$\begin{aligned} \omega_{cab} \equiv & \frac{1}{2}(\partial_c g_{ba} + \partial_a g_{cb} - \partial_b g_{ca}) - \frac{1}{2}(\Omega_{cab} + \Omega_{bca} - \Omega_{abc}) \\ & + \frac{1}{2}(T_{cab} + T_{bca} - T_{abc}) + \frac{1}{2}(Q_{cab} + Q_{abc} - Q_{bca}), \end{aligned}$$

3.1.2. MAG: Sobre el principio de equivalencia

Si bien, es posible hacer

$$g(P) = \eta,$$

la presencia de no metricidad hace que

$$\omega(P) \neq 0,$$

— 4. Planteamiento del problema

	Lovelock	Gauge	Termodinámica
$g_{\mu\nu}$	R D. Lovelock, J. Math. Phys., 1971.	$R + \mathcal{O}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\right)$ F. W. Hehl, Nato science series B, 1979.	R T. Jacobson, Phys. Rev. Lett., 1995.
$g_{\mu\nu}, T^\mu_{\alpha\beta}$	R A. Mardones et. al., Class Quant. Grav., 1991.	$R + \mathcal{O}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta}, T^2_{\alpha\mu\nu}\right)$ F. W. Hehl, Nato science series B, 1979.	R T. De Lorenzo et. al., Phys. Rev. D., 2018.
$g_{\mu\nu}, T^\mu_{\alpha\beta}, Q^\mu_{\alpha\beta}$	$R + \mathcal{O}\left(Q^2_{\alpha\mu\nu}\right)$ A. Jiménez-Cano, Theor. Phys. A., 2022.	$R + \mathcal{O}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta}, T^2_{\alpha\mu\nu}, Q^2_{\alpha\mu\nu}\right)$ F. W. Hehl et. al., Phys. Rept., 1995.	¿?



— 5.1 Objetivo General

Generalizar la formulación clásica de la gravedad cuando ésta se considera no como una teoría eminentemente geométrica sino como una consecuencia de las leyes de la Termodinámica aplicadas a observadores acelerados, para el caso general que involucra curvatura, torsión y no metricidad. Determinar, adicionalmente, las leyes de los agujeros negros para dicha formulación y su relación con las leyes de la Termodinámica. Todo lo anterior en el contexto de las teorías de gauge de la gravedad y considerando siempre la generalización completa que se realizará del teorema de Lovelock en cuatro dimensiones.

— 5.2 Objetivos específicos

I. Obtener la versión generalizada del resultado de Jacobson para espaciotiempos con curvatura, torsión y no metricidad.

D. Iosifidis et. al., Phys. Rev. D.,2018.

II. Generalizar completamente el teorema de Lovelock en cuatro dimensiones para el caso de geometrías no Riemannianas, i.e., cuando se consideran simultáneamente la curvatura, la torsión y la no metricidad.

A. Jiménez-Cano, Theor. Phys. A., 2022.

III. Comparar los resultados obtenidos en los objetivos específicos 1 y 2.

— 5.2 Objetivos específicos

- IV. Buscar soluciones analíticas y numéricas de agujeros negros para la teoría de la gravedad encontrada.
- V. Determinar las leyes de la dinámica de los agujeros negros para la clase de teorías de la gravedad cuyos miembros pertenezcan a la intersección de los conjuntos obtenidos en los objetivos específicos 1 y 2 y que, adicionalmente, se puedan enmarcar en las teorías de gauge de la gravedad.
- VI. Determinar la relación entre las leyes de los agujeros negros que se esperan obtener en el objetivo específico anterior y las leyes de la termodinámica.

— 6. Metodología

- I. Reproducir los cálculos que dan lugar a la ecuación de Raychaudhuri en un espacio tiempo con curvatura, torsión y no metricidad.
D. Iosifidis et. al., Phys. Rev. D., 2018.
- II. Utilizar la proporcionalidad entre la entropía y el área del horizonte para generalizar la entropía del horizonte de Rindler de un observador acelerado al caso de geometrías no Riemannianas. Lo anterior se conseguirá mediante la obtención de la expansión a través de la ecuación de Raychaudhuri para espaciotiempos con curvatura, torsión y no metricidad.
T. Jacobson, Phys. Rev. Lett., 1995.
- III. Utilizar la relación de Clausius para encontrar una relación entre la entropía del horizonte y flujo de calor a través del mismo en el contexto de geometrías no Riemannianas.

— 6. Metodología

IV. Generalizar las leyes de conservación de la PGT mediante el grupo afín general y utilizar estas leyes para obtener las nuevas ecuaciones de campo gravitacional.

F. W. Hehl et. al., Phys. Rept., 1995.

V. Generalizar completamente el teorema de Lovelock en cuatro dimensiones cuando se consideran simultáneamente la curvatura, la torsión y la no metricidad. Para ello, se construirán todos los invariantes posibles en la acción a partir de $\vartheta^a, \omega_a^b, R_a^b, T^a, Q_{ab}$ de tal manera que la acción sea invariante bajo transformaciones locales del grupo afín general y cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange no sean de mayor orden a dos.

A. Mardones et. al., Class. Quant. Grav., 1991.

— 6. Metodología

VI. Comparar las ecuaciones de campo gravitacional generalizadas que se obtuvieron siguiendo los argumentos de T. Jacobson, para un espaciotiempo con geometría no Riemanniana con el resultado obtenido en el teorema de Lovelock generalizado en cuatro dimensiones.

VII. Adquirir conocimientos sobre la formulación de teorías de gauge de la gravedad con el fin de obtener el Lagrangiano cuadrático más general de la MAG.

A. Jiménez-Cano, Theor. Phys. A., 2022.

VIII. Seleccionar aquel conjunto de teorías de la gravedad cuyos miembros pertenezcan a la intersección de los conjuntos obtenidos en los objetivos específicos 1 y 2 y que, adicionalmente, se puedan enmarcar en el contexto de las teorías de gauge de la gravedad.

— 6. Metodología

- IX. Realizar un análisis físico de dicho conjunto de teorías de la gravedad y de las implicaciones que dicho conjunto pueda tener sobre nuestra comprensión de la naturaleza de la gravedad.
- X. Emplear métricas estacionarias esféricamente simétricas y axialmente simétricas, la teoría de la gravedad encontrada, y la descomposición irreducible de la 2-forma de torsión y la 1-forma de no metricidad, para encontrar los potenciales métricos analíticamente. Por otra parte, mediante una expansión en series de potencias de los potenciales métricos, y una posterior integración hacia el infinito espacial, se buscará encontrar soluciones numéricas de agujeros negros.

S. Bahamonde et. al., JCAP, 2022.

— 6. Metodología

XI. Obtener la ley cero de la dinámica de los agujeros negros generalizada para la nueva teoría de la gravedad usando la ecuación de Raychaudhuri para espaciotiempos con curvatura, torsión y no metricidad.

D. Iosifidis et. al., Phys. Rev. D., 2018.

XII. Obtener la primera ley de la dinámica de los agujeros negros generalizada para la teoría de la gravedad encontrada; se estudiará el efecto en el horizonte causado por materia que cae en el agujero negro para así deducir esta ley. También se tendrá como base la deducción de esta ley siguiendo el formalismo de Wald.

R. Dey, Phys. Rev. D, 2017.

T. De Lorenzo, Phys. Rev. D, 2018.

C. Corral & Y. Bonder, Class. Quant. Grav., 2019.

Y. Bonder et. al., Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., 2023.

R. M. Wald, University of Chicago Press, 2010.

— 6. Metodología

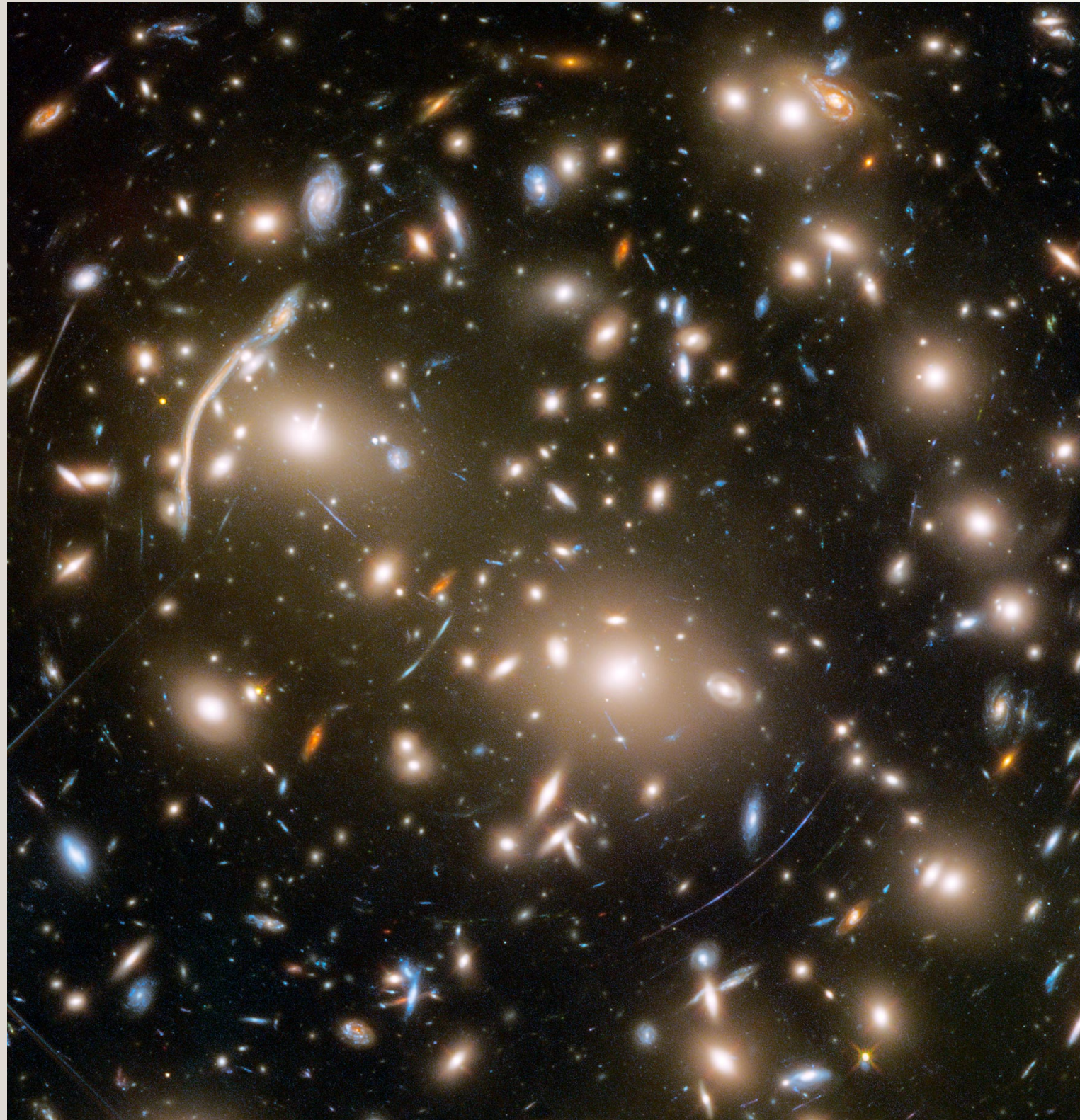
XIII. Utilizar las herramientas de la teoría cuántica de campos en variedades curvas para obtener la temperatura y la entropía de los agujeros negros para la nueva teoría de la gravedad; ésto último permite generalizar la segunda ley de la dinámica de los agujeros negros y encontrar la posible relación con las leyes de la termodinámica.

V. F. Mukhanov, Cambridge University Press, 2013.
R. M. Wald, University of Chicago Press, 1994.
N. D. Birrell et. al., Cambridge University Press, 1984.

— 7. Cronograma de actividades

Los ítems aquí referenciados corresponden a los descritos en la metodología.

Primera etapa (6 meses)	Segunda etapa (6 meses)	Tercera etapa (6 meses)	Cuarta etapa (6 meses)
1. Ítem 1. 2. Ítem 2. 3. Ítem 3. 4. Ítem 4.	1. Ítem 5. 2. Ítem 6. 3. Ítem 7.	1. Ítem 8. 2. Ítem 9. 3. Ítem 10.	1. Ítem 11. 2. Ítem 12. 3. Ítem 13.



¡Muchas gracias!
