

**Ecuaciones de Estado de Estrellas de Neutrones  
Mediante la Teoría Relativista de Campo Medio**

Nicolas Mantilla Molina

Directora:  
Laura Marcela Becerra

Codirectores:  
Jose Fernando Rodriguez  
Luis Alberto Nuñez



Universidad  
Industrial de  
Santander

#LaUISqueQueremos



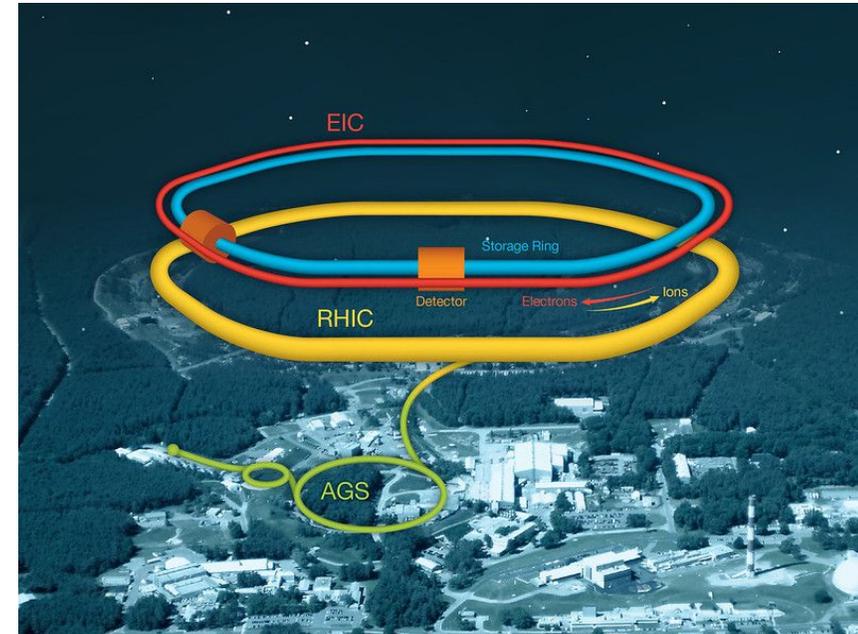
# Estrellas de Neutrones y Materia Nuclear

Objetos estelares cuya materia se encuentra comprimida a presiones y densidades extremas.



Escala de las EN.  
Tomado de: [science.nasa.gov](http://science.nasa.gov)

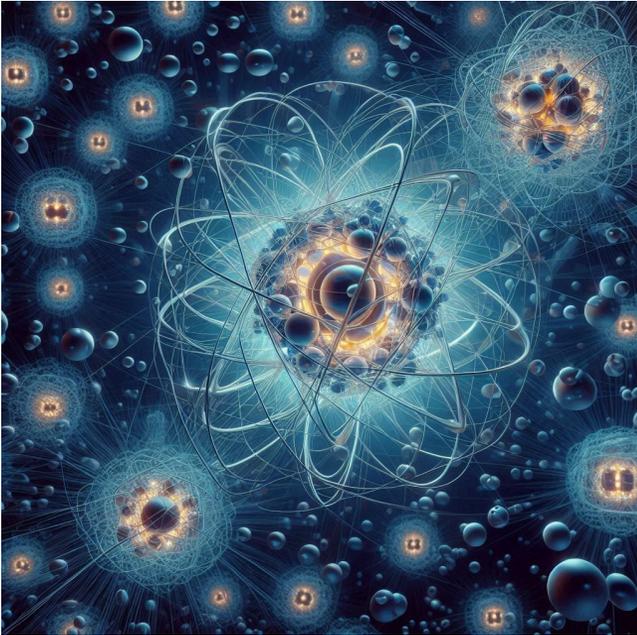
Densidades muy superiores a la materia nuclear en condiciones terrestres.



Futuro colisionador EIC.  
Tomado de: [bnl.gov/eic](http://bnl.gov/eic)

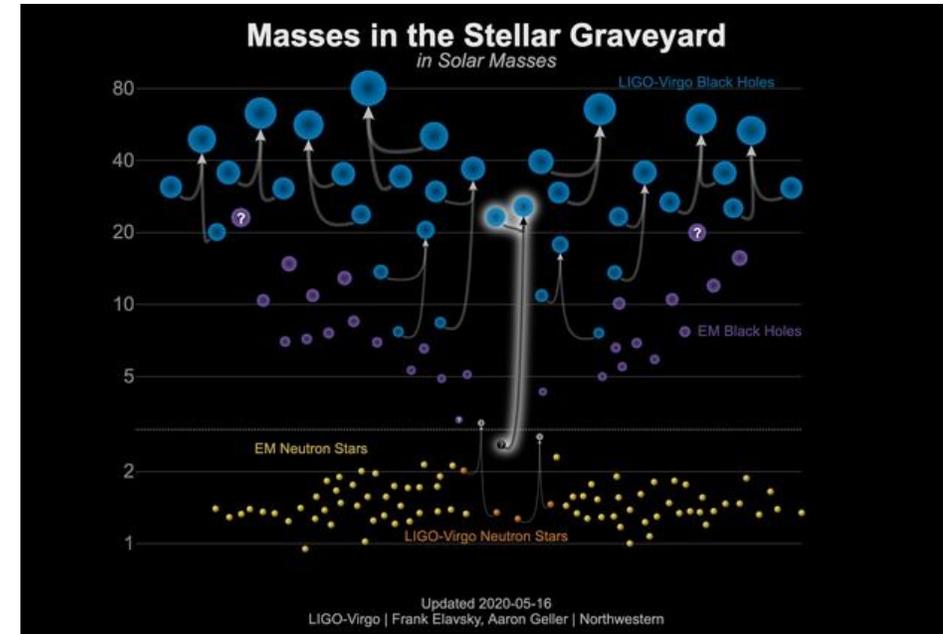
# Estrellas de Neutrones y Materia Nuclear

La Teoría Relativista de Campo Medio permite hallar ecuaciones de estado a densidades altas.



Representación artística de la materia nuclear.  
Generada con IA.

El Mass-Gap puede explorarse mediante los parámetros de las ecuaciones de estado.



Población de masas detectadas.  
Tomado de: [ligo.caltech.edu](http://ligo.caltech.edu)



# El Problema

3



Universidad  
Industrial de  
Santander

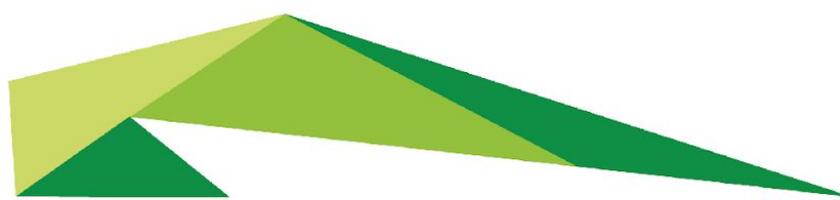
¿Qué propiedades físicas tienen los objetos cuya descripción concuerda con las restricciones impuestas por las observaciones y experimentos?

La principal dificultad para estudiar la materia nuclear densa es la imposibilidad de replicarla en laboratorios, por lo cual se justifica la elaboración de modelos teóricos para predecir sus propiedades y contrastar con las observaciones recientes de LIGO-VIRGO y NICER.

Con el fin de construir ecuaciones de estado que describan este tipo de materia se emplean teorías efectivas, como la teoría relativista de campo medio. Una vez obtenidas se pueden resolver las ecuaciones de estructura para calcular cantidades macroscópicas a contrastar. Los límites de los parámetros de estas ecuaciones contribuyen al estudio del Mass-Gap, de entre 2.5 y 5 masas solares.

Somos **el mejor** escenario  
de creación e innovación.

[www.uis.edu.co](http://www.uis.edu.co)



# Ecuaciones de Estructura

En el marco de la relatividad general de Einstein, se tienen las ecuaciones de campo:

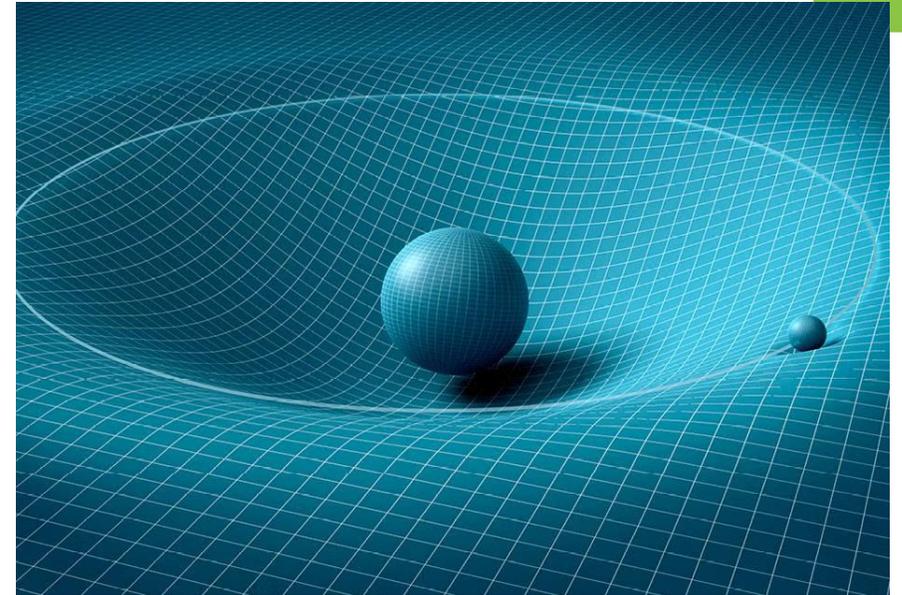
$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Estas ecuaciones satisfacen las leyes de conservación:

$$\nabla_{\rho} T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu;\rho} = 0$$

Para un sistema estático, esféricamente simétrico, la métrica tiene la forma:

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$



Curvatura del espacio-tiempo  
Tomado de: [lbbc.edu/physics](http://lbbc.edu/physics)

# Ecuaciones de Estructura

Para un fluido perfecto, el tensor energía-momentum:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}$$

A partir de lo anterior, se obtienen las ecuaciones de estructura:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho && \longrightarrow m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\lambda}) \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} \end{aligned}$$

# Ecuaciones de Estado

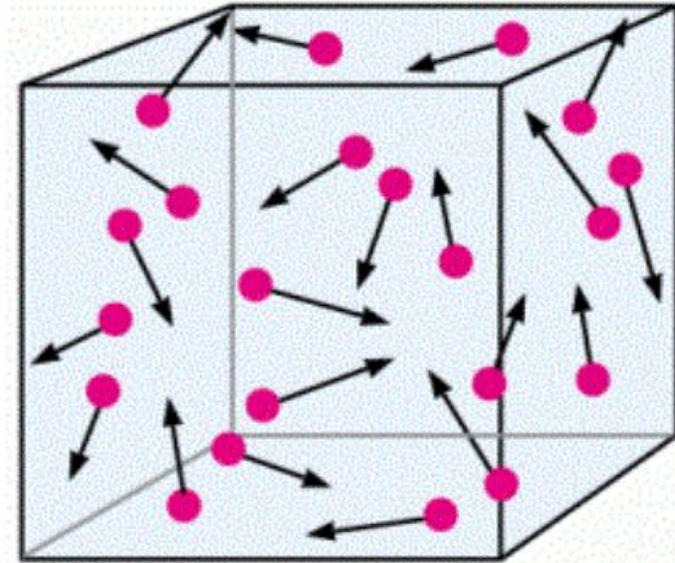
Describen el comportamiento interno de la materia. Solo se consideran ecuaciones de estado barótropas: independientes de la temperatura.

De la teoría cinética de los gases, a partir de una función de ocupación  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ :

$$n = \int \frac{g}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p,$$

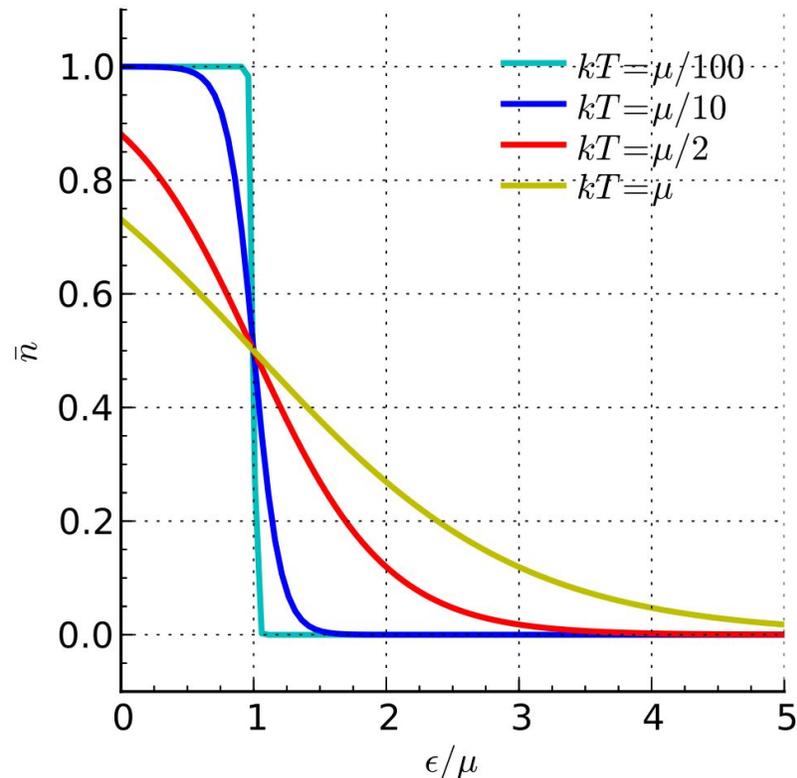
$$\rho = \int (p^2 + m^2)^{1/2} \frac{g}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p$$

$$P = \frac{1}{3} \int p v(p) \frac{g}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p,$$



# Gas Ideal de n-p-e

Formado por neutrones, protones y electrones completamente degenerados, no interactuantes. La función de ocupación es:



$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) + 1} \approx \begin{cases} 1, & E \leq E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases}$$

# Gas Ideal de n-p-e

Integrando las expresiones generales, y definiendo un parámetro  $x_i = p_F^i/m_i$  para cada especie:

$$n_i = \frac{8\pi m_i^3}{3h^3} x_i^3$$

$$\rho_i = \frac{\pi m_i^4}{h^3} F(x_i)$$

$$P_i = \frac{\pi m_i^4}{h^3} G(x_i)$$



$$n = n_n + n_p + n_e$$

$$\rho = \rho_n + \rho_p + \rho_e$$

$$P = P_n + P_p + P_e$$

$$F(x) = x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 + 1) - \ln x + \sqrt{x^2 + 1},$$

$$G(x) = x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2/3 + 1) + \ln x + \sqrt{x^2 + 1}$$

# Gas Ideal de n-p-e

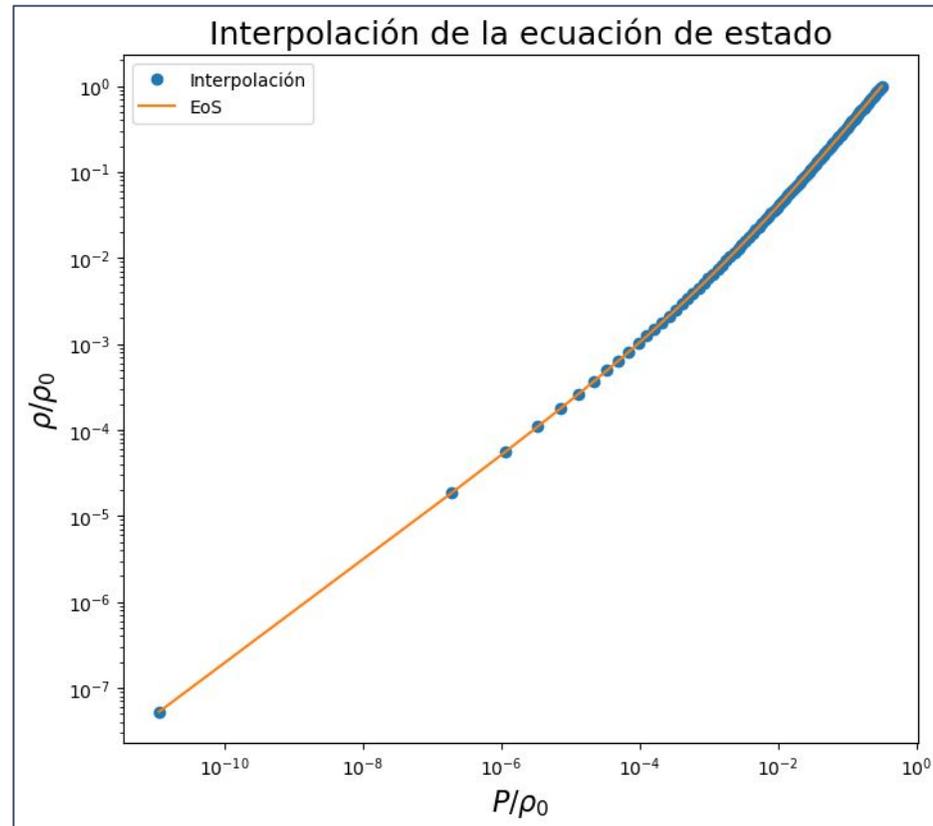
Neutralidad de carga en la estrella:

$$n_e(x_e) = n_p(x_p)$$

Equilibrio frente al decaimiento  $\beta$  inverso:

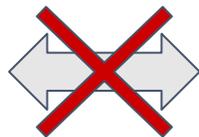
$$\mu_e + \mu_p - \mu_\nu = \mu_n$$

Interpolando la ecuación de estado:

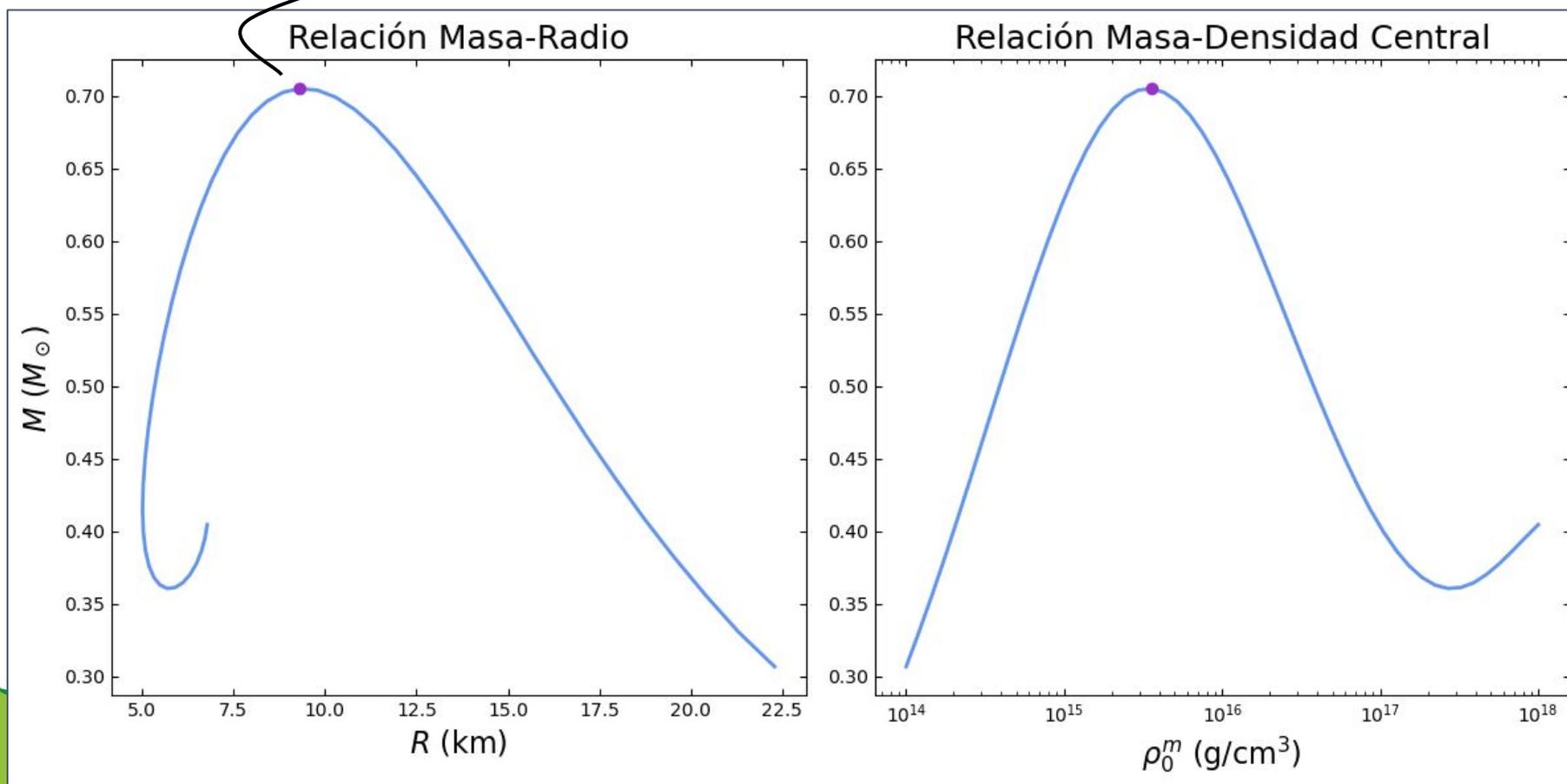


# Gas Ideal de n-p-e

Masa máxima predicha:  $\sim 0.7 M_{\odot}$



PSR J0760+6620:  $\sim 2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$



el mejor escenario  
de creación e innovación.

[www.uis.edu.co](http://www.uis.edu.co)

# Teoría Relativista de Campo Medio

Formulada en 1974 por John Walecka. Modelo relativista de muchos cuerpos basado en la teoría cuántica de campos. Consideramos el modelo ( $\sigma$ - $\omega$ ):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma_{\mu}(\hbar\partial^{\mu} + ig_{\omega}\omega^{\mu}) - (m - g_{\sigma}\sigma)] \psi + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - (m_{\sigma}/\hbar)^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{m_{\omega}^2}{2\hbar^2}\omega_{\mu}\omega^{\mu}$$

En donde se ha definido el campo tensorial:

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}$$

El término de interacción es:

$$\mathcal{L}_{int} = g_{\sigma}\sigma\bar{\psi}\psi - g_{\omega}\omega_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

# Teoría Relativista de Campo Medio

La evolución de estos campos sigue las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} = 0$$

Los campos satisfacen:

$$(\square + (m_\sigma/\hbar)^2)\sigma = g_\sigma \bar{\psi}\psi$$

$$(\square + (m_\omega/\hbar)^2)\omega_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \omega_\nu = g_\omega \bar{\psi}\gamma_\mu \psi$$

$$[i\gamma_\mu (\hbar \partial^\mu + ig_\omega \omega^\mu) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\partial^\mu (\square + (m_\omega/\hbar)^2)\omega_\mu - \partial^\mu \partial_\mu \partial^\nu \omega_\nu} = g_\omega \cancel{\partial^\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi}$$

# Teoría Relativista de Campo Medio

Como el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$(\square + (m_\sigma/\hbar)^2)\sigma = g_\sigma\bar{\psi}\psi$$

$$(\square + (m_\omega/\hbar)^2)\omega_\mu = g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

$$[i\gamma_\mu(\hbar\partial^\mu + ig_\omega\omega^\mu) - (m - g_\sigma\sigma)]\psi = 0$$

es complicado de resolver, se introduce la aproximación de campo medio

$$\sigma(x^\mu) \rightarrow \langle\sigma(x^\mu)\rangle, \omega_\mu(x^\mu) \rightarrow \langle\omega_\mu(x^\mu)\rangle$$

los cuales se calculan mediante las ecuaciones

$$(m_\sigma/\hbar)^2\langle\sigma\rangle = g_\sigma\langle\bar{\psi}\psi\rangle$$

$$(m_\omega/\hbar)^2\langle\omega_\mu\rangle = g_\omega\langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rangle$$

# Teoría Relativista de Campo Medio

Demandando invarianza ante traslaciones espacio-temporales:

$$\partial_{\mu} \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_0 \mathcal{T}^{0\nu} + \partial_k \mathcal{T}^{k\nu} = 0$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi_i)} \partial^{\nu} \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Integrando sobre el volumen espacial se encuentran las componentes del 4-momento del fluido, las cuales son cantidades conservadas del sistema

$$p^{\mu} = \int \mathcal{T}^{0\mu} d^3 r$$

# Teoría Relativista de Campo Medio

Aplicando lo anterior a la densidad lagrangiana del modelo ( $\sigma$ - $\omega$ ) se obtiene:

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{\hbar^2} \sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\omega^2}{\hbar^2} \omega_0^2 + \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} \sqrt{p^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} p^2 dp,$$

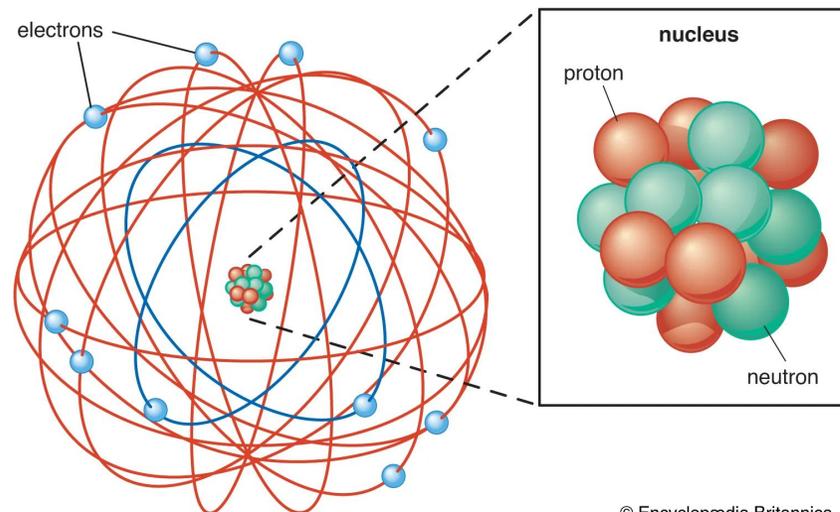
$$P = -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{\hbar^2} \sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\omega^2}{\hbar^2} \omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}} dp$$

# Datos Experimentales: Materia Nuclear

Los modelos teóricos deben reproducir las propiedades conocidas de la materia nuclear.

- Densidad (de número) de saturación:  $n_{sat} = \frac{A}{4\pi R^3/3} = \frac{3}{4\pi R_0^3} = 0.17 \pm 0.03 \text{ fm}^{-3}$

- Energía de enlace por nucleón:  $\frac{B}{A} = -16.24 \text{ MeV}$



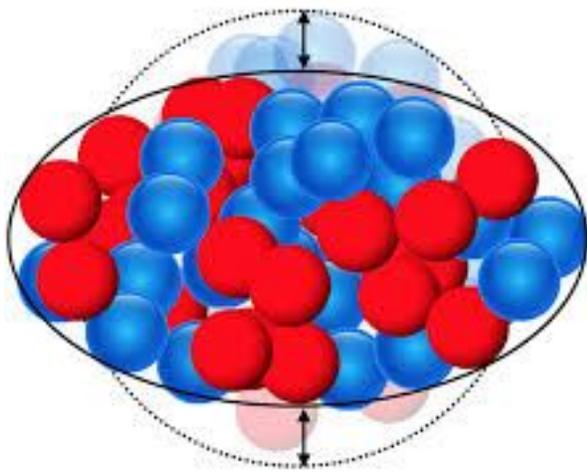
© Encyclopædia Britannica, Inc.

Somos **el mejor** escenario  
de creación e innovación.

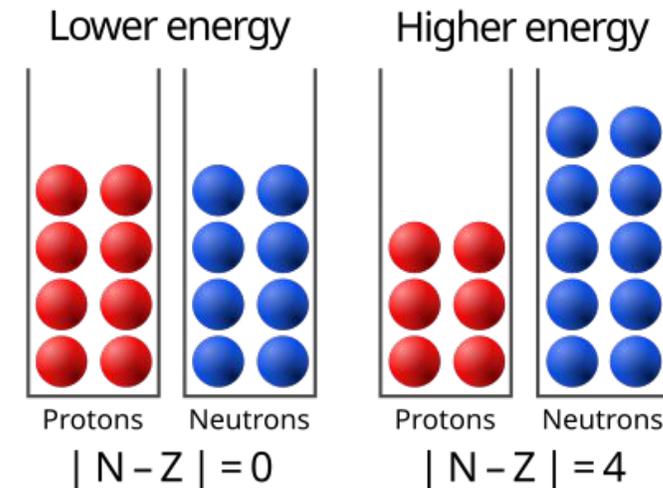
[www.uis.edu.co](http://www.uis.edu.co)

# Datos Experimentales: Materia Nuclear

- Módulo de compresibilidad: 
$$K_{\infty} = 9 \left[ n^2 \frac{d^2 B/A}{dn^2} \right]_{n_{sat}} = 230 \pm 40 \text{ MeV}$$
- Energía de simetría: 
$$E_{sym} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 (\rho/n)}{\partial t^2} \right]_{t=0} = 31.6 \pm 2.7 \text{ MeV}, t \equiv \frac{n_n - n_p}{n}$$



$A = 16$

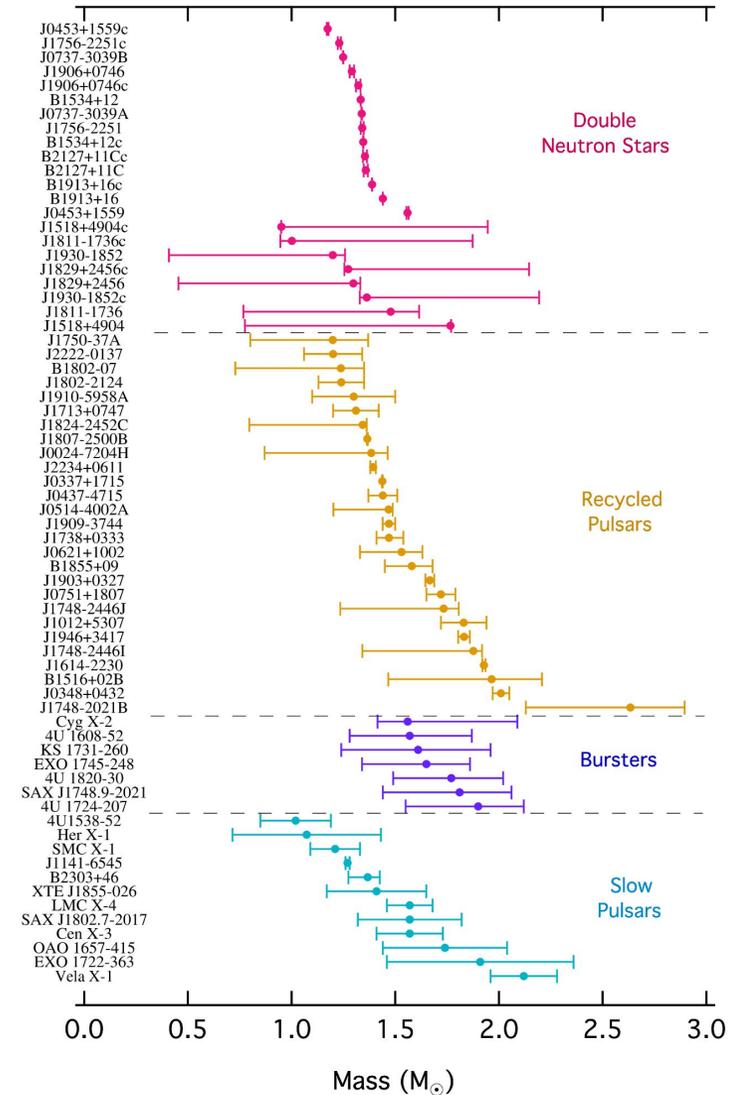
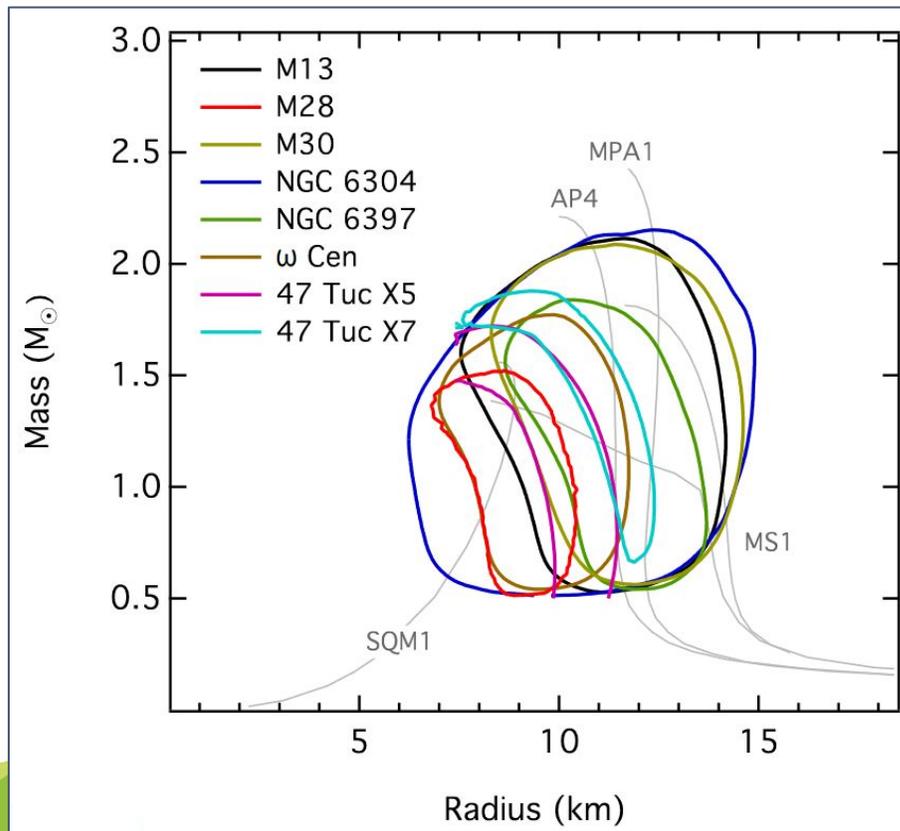


Somos **el mejor** escenario  
de creación e innovación.

[www.uis.edu.co](http://www.uis.edu.co)

# Datos Experimentales: Observaciones Astronómicas

Provenientes principalmente de observaciones en radio y rayos-X.





# Objetivos

Evaluar las implicaciones de las observaciones astronómicas sobre los parámetros libres de las Ecuaciones de Estado de Estrellas de Neutrones construidas mediante la Teoría Relativista de Campo Medio.

- Construir EdE teóricas mediante la TRCM que describan la materia nuclear en EN.
- Delimitar el espacio de parámetros libres de las EdE a partir de las observaciones de ondas gravitacionales de la colaboración LIGO y observaciones de rayos-X del telescopio NICER.
- Explorar los límites de los parámetros de las EdE para describir EN dentro en el Mass-Gap.



# Actividades

20



Universidad  
Industrial de  
Santander

Actividades enfocadas al objetivo específico 1.

**A1.** Estudiar la TRCM en conjunto con Teoría Cuántica de Campos.

**A2.** Revisión de artículos recientes sobre la construcción de EdE de la materia nuclear densa.

**A3.** Construir EdE a partir de una densidad lagrangiana que considera neutrones, protones, electrones y muones, así como un campo mesónico escalar, un campo mesónico vectorial y un campo mesónico de isospin.

**A4.** Elaborar un programa que resuelva numéricamente las ecuaciones obtenidas para obtener EdE utilizando Python.

Somos **el mejor** escenario  
de creación e innovación.

[www.uis.edu.co](http://www.uis.edu.co)



## Actividades

Actividades enfocadas a los objetivos específicos 2 y 3.

**A5.** Estudiar y derivar las Ecuaciones de Estructura para configuraciones esféricamente simétricas mediante la Teoría de la Relatividad General.

**A6.** Implementar un código numérico para integrar las Ecuaciones de Estructura usando EdE genéricas.

**A7.** Integrar las Ecuaciones de Estructura empleando las EdE obtenidas y hallar la relación Masa-Radio.

**A8.** Comparar la relación de Masa-Radio con las observaciones astronómicas de masa y radio de EN.

**A9.** Estudiar el espacio de parámetros libres de las EdE y evaluar las restricciones impuestas por las observaciones recientes de ondas gravitacionales y radiación electromagnética.

**A10.** Estudiar la capacidad de la teoría para predecir EN dentro del Mass-Gap.

# Actividades

Actividades enfocadas al reporte final.

**A11.** Recoger los resultados de investigación obtenidos mediante un reporte final.

Cronograma de actividades:

Mes/Actividad	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
Ago 2024					X						
Sept 2024	X				X	X					
Oct 2024	X	X				X					
Nov 2024	X	X									
Dic 2024	X	X	X								
Ene 2025	X		X								
Feb 2025			X	X			X				
Mar 2025								X	X		
Abr 2025								X	X		
May 2025									X	X	X
Jun 2025										X	X
Jul 2025											X



Universidad  
Industrial de  
Santander

#LaUISqueQueremos

# iGracias!



# Respaldo

Adimensionalización de las ecuaciones de estructura:

$$\frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = \alpha \hat{r}^2 \hat{\rho}; \quad \alpha = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{Mc^2}$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{r}} = -\beta \frac{\hat{m}\hat{\rho}}{\hat{r}^2} \left(1 + \gamma \frac{\hat{P}}{\hat{\rho}}\right) \left(1 + \alpha\gamma \frac{\hat{r}^3 \hat{P}}{\hat{m}}\right) \left(1 - \lambda \frac{2\hat{m}}{\hat{r}}\right)^{-1}; \quad \beta = \frac{\lambda}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{P_0}{\rho_0}, \quad \lambda = \frac{GM}{c^2 R}$$

$$\frac{d\phi}{d\hat{r}} = -\frac{\gamma}{\hat{\rho} + \gamma \hat{P}} \frac{d\hat{P}}{d\hat{r}}.$$

$$P_0 = \rho_0$$

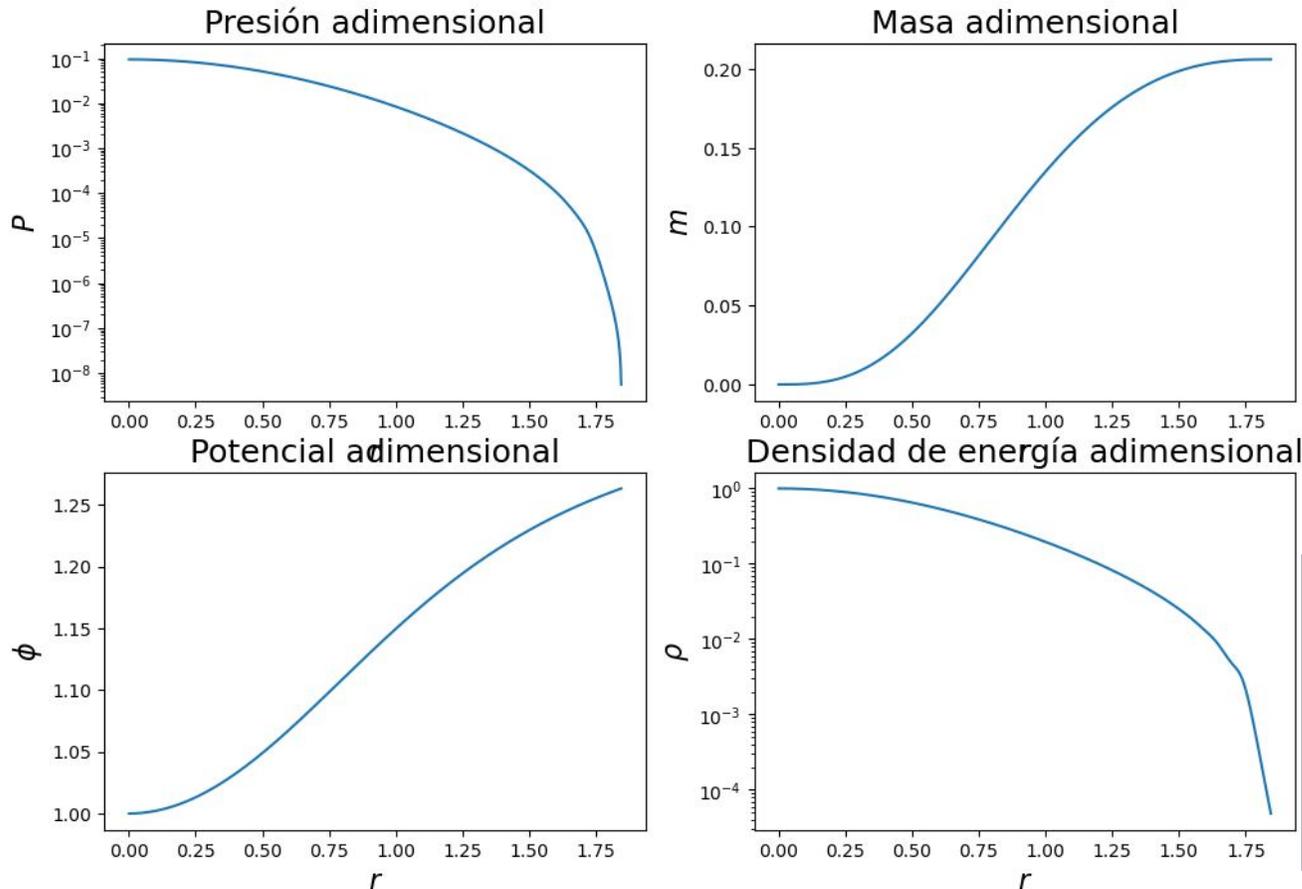
$$M = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{c^2}$$

$$R^2 = \frac{c^4}{4\pi G \rho_0}$$

# Respaldo

Solución numérica de las ecuaciones de estructura con gas ideal n-p-e:

Solución para la densidad de masa que da la mayor masa



$$\hat{P} = \frac{1}{P_0} (A_e f(x_e) + A_p f(x_p) + A_n f(x_n)),$$

$$\hat{\rho} = \frac{3}{\rho_0} (A_e g(x_e) + A_p g(x_p) + A_n g(x_n))$$

$$n = \frac{B_e}{m_e} x_e^3 + \frac{B_p}{m_p} x_p^3 + \frac{B_n}{m_n} x_n^3 \Rightarrow \rho_m = B_e x_e^3 + B_p x_p^3 + B_n x_n^3$$

$$A_i = \frac{\pi m_i^4 c^5}{3 h^3},$$

$$B_i = \frac{8 \pi m_i^4 c^3}{3 h^3} = \frac{8}{c^2} A_i.$$

$$x_p = \frac{m_e}{m_p} x_e,$$

$$x_n = \frac{1}{m_n} \left[ \left( m_e (1 + x_e^2)^{1/2} + (m_p^2 + m_e^2 x_e^2)^{1/2} \right)^2 - m_n^2 \right]^{1/2}$$

# Respaldo

Espacio tiempo plano en las distancias características:

$$g_{rr}^{sch} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \quad \longrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} g_{rr}^{sch} = \lim_{r \rightarrow 0} - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} = -1$$

$$\frac{g_{rr}^{sch}(R)}{g_{rr}^{sch}(0)} = \left( 1 - \frac{2(2M_{\odot})}{10 \text{ km}} \right)^{-1} = \frac{10}{4} \quad \longrightarrow \quad \delta g_{rr}^{sch} |_{r_0} = \frac{10}{4} \frac{r_0}{R} \approx 10^{-19}$$



# Respaldo

¿Cómo se compara TRCM con otras teorías?

	Schrodinger-based	TRCM	QCD
Fundamentos	Mecánica cuántica no relativista para nucleones usando potenciales efectivos	Teoría de campos relativista con mesones efectivos para describir interacciones nucleares	Interacciones fundamentales entre quarks y gluones a través de la fuerza fuerte.
Causalidad	Puede violar causalidad	Causal por construcción	Causal por construcción
Complejidad	Moderada según las correcciones incluídas.	Relativamente simple debido a aproximaciones de campo medio.	Inaccesible computacionalmente para muchos problemas prácticos
Ventajas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Adecuado para núcleos finitos y bajas densidades.</li> <li>- Métodos probados, ampliamente usados en estructura nuclear.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modela propiedades de saturación y alta densidad.</li> <li>- Asocia los parámetros libres con propiedades conocidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Teoría fundamental.</li> <li>- Universalidad en la descripción de interacciones nucleares.</li> </ul>
Desventajas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No es adecuada para condiciones relativistas o densidades extremas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Descuida correcciones cuánticas más allá del campo medio.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Difícil de conectar con observables experimentales macroscópicos.</li> </ul>

# Respaldo

Valores esperados de los campos (unidades naturales):

$$H_D = \gamma_0 \left[ \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + g_\omega \gamma_{1\mu} \omega^\mu + m^* \right] \quad (\psi^\dagger H_D \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = K_0(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}) + g_\omega \omega_0$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi^\dagger H_D \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = (\psi^\dagger \frac{\partial H_D}{\partial \zeta} \psi)_{\mathbf{k}\kappa} + k_0(\mathbf{k}) \cancel{\frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi^\dagger \psi)_{\mathbf{k}\kappa}} \quad \langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle = \sum_\kappa \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (\bar{\psi} \Gamma \psi)_{\mathbf{k}\kappa} \Theta[\mu - e(\mathbf{k})]$$

$$g_\sigma \sigma = \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 dk \frac{m - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}},$$

$$g_\omega \omega_0 = \left( \frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \rho,$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = 0.$$



Universidad  
Industrial de  
Santander

# iGracias!

#LaUISqueQueremos