

CONEXIÓN ENTRE EL CAMPO DE DENSIDAD Y VELOCIDADES PECULIARES EN COSMOLOGÍA . UNA HERRAMIENTA DE GRAN UTILIDAD EN LA DESCRIPCIÓN DE FORMACIÓN DE ESTRUCTURA



Congreso Colombiano de Astrofísica y Astronomía CoCoA 2024



Diego Fernando Fonseca Moreno

Candidato a doctor en Ciencias-Astronomía, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
Observatorio Astronómico Nacional (OAN)
Profesor Facultad de ciencias Universidad Antonio Nariño

Dr. Rer. Nat. Leonardo Castañeda Colorado
Ph.D. Luz Ángela García Peñaloza

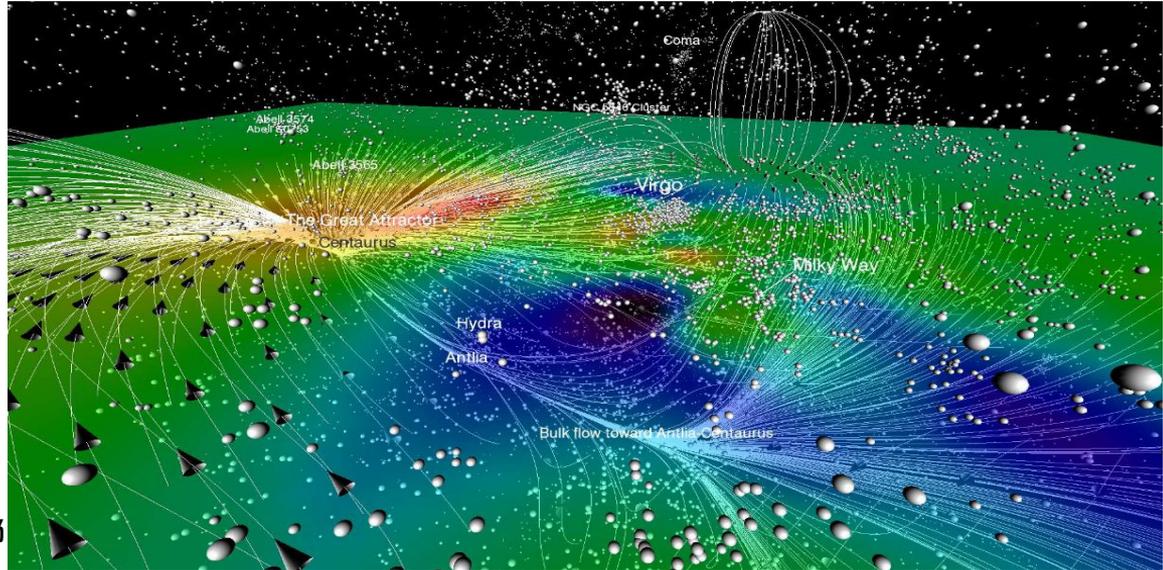
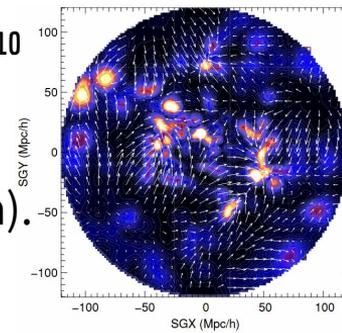
20-23 Noviembre. Bucaramanga, Colombia.
Universidad Industrial de Santander



Plan de trabajo

1. Breve historia del universo y motivaciones cosmológicas.
2. Irregularidades en la distribución de materia (Aproximación Newtoniana).
3. Dinámica de partículas en un universo en expansión.
4. Ecuación de Vlasov en cosmología.
5. Aproximación lineal para el campo de materia y velocidades peculiares.
6. Relación entre irregularidades en el campo de densidad y campo de velocidades peculiares a gran escala.
7. Consideraciones finales.

Lavaux et al, 2010



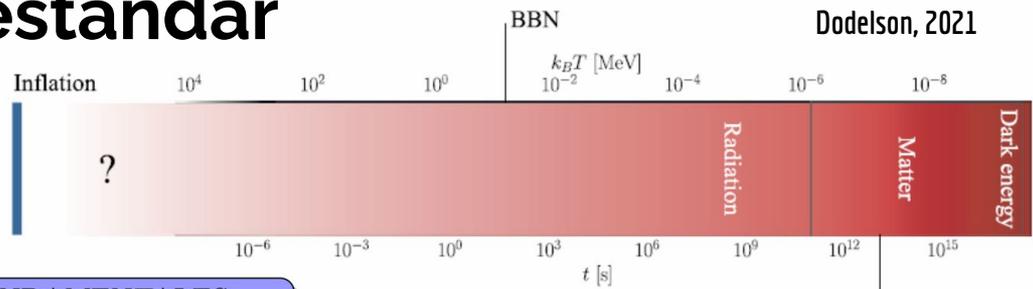
Courtois et al, 2013

Motivaciones cosmológicas

- **(Peebles, 1980)** La conexión entre las irregularidades en densidad y campo de velocidades peculiares, junto con el mejoramiento de los datos podrían generar una **estimación útil de parámetros cosmológicos**.
- **(Carrick et al, 2015)** Las mediciones de velocidades peculiares son una herramienta indispensable, a bajo corrimiento al rojo, para mapear la distribución de materia a gran escala del universo y por lo tanto puede usarse para **restringir cosmología**.
- **(Graziani et al, 2020)** Las mediciones de velocidades peculiares muestran completamente el campo de densidad inducido por los **efectos combinados de materia oscura y bariónica**.
- **(Howlett et al, 2022)** Mediciones precisas de velocidades peculiares locales son esenciales para **inferir la ley de Hubble–Lemaître** y, además, permiten realizar **cosmografía** y estudios cosmológicos precisos de la **gravedad en el universo local**.

Modelo cosmológico estándar

Breve historia del universo 



Dodelson, 2021

ECUACIONES FUNDAMENTALES EN COSMOLOGÍA

GRAVEDAD
Ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{s=r,m,v,DE} \frac{\Omega_s}{[a(t)]^{3(1+\omega_s)}} + \frac{\Omega_k}{[a(t)]^2}$$

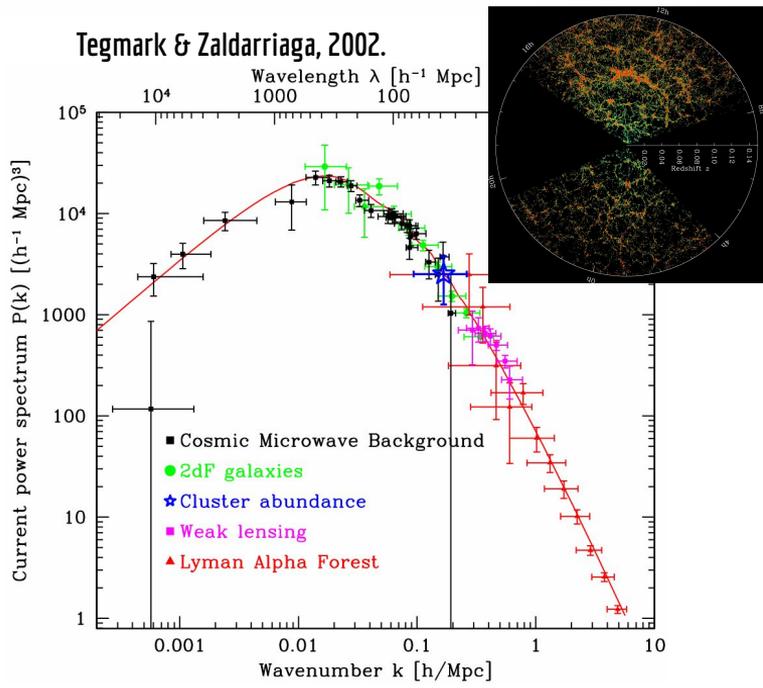
MECÁNICA ESTADÍSTICA
Ecuaciones de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - H p \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - H p \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - H p \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]$$

Tegmark & Zaldarriaga, 2002.



Irregularidades en la distribución de materia

Siguiendo a Peebles (1980)

"Discussion of how irregularities in the matter distribution behave in an expanding universe is greatly simplified by the fact a limiting approximation of general relativity, Newtonian mechanics, applies in a region small compared to the Hubble length cH^{-1} " (and large compared the Schwarzschild radii of any collapsed objects). The rest of the universe can affect the region only through a tidal field".



Es posible simplificar la descripción de irregularidades en el campo de materia utilizando una región del espacio-tiempo que satisfaga el rango de escalas.



Radio de Schwarzschild ($\sim 10^{14}$ cm) $< R <$ Radio de Hubble ($\sim 10^{28}$ cm)



Se describe la distribución de materia y su movimiento en términos de la desviación respecto a un universo homogéneo e isotrópico (modelo de concordancia).

$$(1) \quad \nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi = 4\pi G \left(\rho + 3 \frac{P}{c^2} \right) - \Lambda$$

Λ CDM

Dinámica de partícula en un universo en expansión

En este modelo, la separación propia de las partículas varía con el tiempo como  $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$ (2)

Marco Euleriano

si $P \ll \rho c^2$, $\Lambda = 0$  $\Phi_B = \frac{2}{3}\pi G\rho_B(t)r^2$

Al utilizar las coordenadas Eulerianas, se obtiene la ecuación cosmológica.

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_B(t)a(t) \quad (3)$$

En las coordenadas comóviles, la velocidad propia de la partícula es

Potencial Cosmológico

$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{a}(t)\mathbf{x} + \underbrace{a(t)\dot{\mathbf{x}}}_{\text{Velocidad peculiar}} \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{a}(t)\mathbf{x} + a(t)\dot{\mathbf{x}})^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t)$ (4)



Usando la transformación canónica 

$$\mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L} - \frac{d\Psi}{dt}, \quad \Psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}x^2, \quad (5)$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2 - m\phi, \quad \phi \equiv \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2$$

De manera que, la ecuación de campo en el nuevo potencial es $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \phi = 4\pi G \rho a^2 + 3a\ddot{a}$ (6)

Así podemos establecer que $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \phi = 4\pi G \rho a^2 [\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_B(t)]$ (7) Fuente de ϕ

Y dadas las ecuaciones de movimiento

$$\mathbf{p} = ma^2 \dot{\mathbf{x}},$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m \nabla_{\mathbf{x}} \phi.$$


$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} \phi}{a}$$


(8)

¡Campo de aceleraciones peculiares!



¡La fuente para el potencial es la componente fluctuante de la densidad de materia no relativista!

$$\phi(\mathbf{x}) = -Ga^2 \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}') - \rho_B}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} \phi}{a} = Ga \int d^3x' [\rho(\mathbf{x}') - \rho_B] \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}$$

(9)



$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = Ga \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}$$

(10)



Ecuación de Vlasov en cosmología

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{ma^2(t)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - m \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0. \quad (11)$$



Densidad de contraste

$$\begin{aligned} \frac{m}{a^3(t)} \int d^3 p f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &\equiv \rho(t, \mathbf{x}) \equiv \rho_B(t) \left[1 + \delta(t, \mathbf{x}) \right], \\ \frac{1}{a^4(t)} \int d^3 p f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \mathbf{p} &\equiv \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \\ \frac{1}{ma^5(t)} \int d^3 p f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) p^i p^j &\equiv \rho(t, \mathbf{x}) v^i(t, \mathbf{x}) v^j(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{1}{a(t)} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\left(1 + \delta(t, \mathbf{x}) \right) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right] = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\left(1 + \delta(t, \mathbf{x}) \right) \nabla_{\mathbf{x}} \phi \right] + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(1 + \delta(t, \mathbf{x}) \right) v^i(t, \mathbf{x}) v^j(t, \mathbf{x}). \quad (13)$$

Explorando el campo de densidad de contraste a primer orden (Incluyendo materia bariónica)

$$\frac{\partial^2 \delta_C(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^2} + \mathcal{H}(\tau) \frac{\partial \delta_C(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau} - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) \delta_C(\tau, \mathbf{x}) = 0.$$

$$\delta_C(\tau, \mathbf{x}) = D(\tau) \delta_C(\tau_i, \mathbf{x}) \quad (14)$$

$$\frac{d^2 D(\tau)}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m(\tau) D(\tau) = 0$$

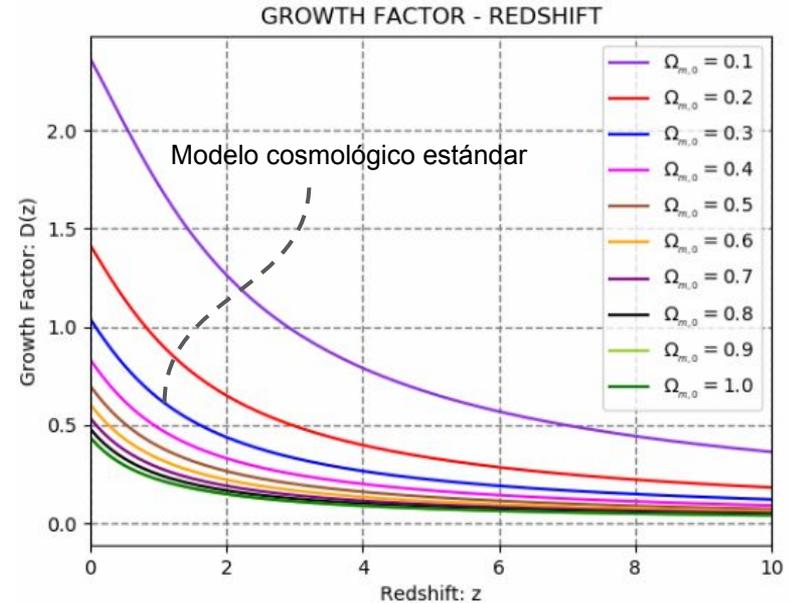
$$(z+1)P(z) \frac{d^2 D}{dz^2} + Q(z) \frac{dD}{dz} - \frac{3}{2} \Omega_{m,0} (z+1)^3 D = 0$$

$$D^+(z) = CP^{1/2}(z) \int_z^\infty \frac{s+1}{P^{3/2}(s)} ds \quad (15)$$

D. Edwards and D. Heat (1975).

F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro, (2001)

Dodelson and Schmidt (2021).



Fonseca & Castañeda, 2023.

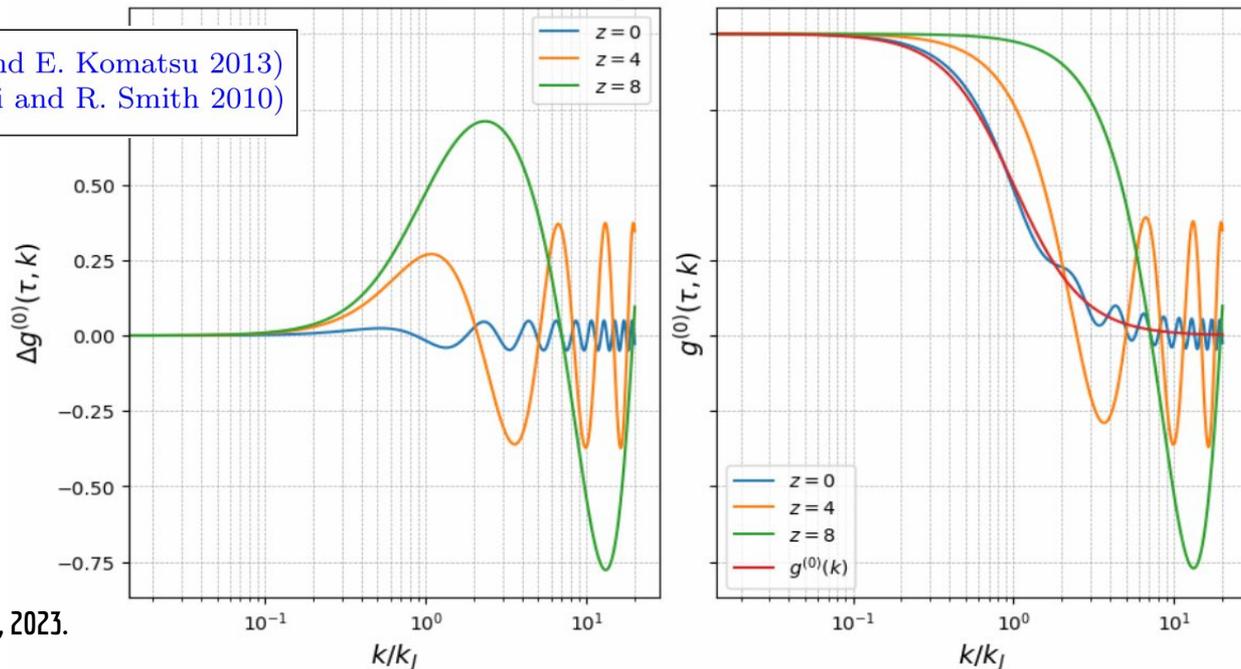
$$\frac{\partial^2 \delta_C}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \delta_C}{\partial \tau} - \frac{6}{\tau^2} \left[\frac{\bar{\rho}_C}{\rho_m} \delta_C + \frac{\bar{\rho}_B}{\rho_m} \delta_B \right] = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\delta}_C(\tau, \mathbf{k})}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \tilde{\delta}_C(\tau, \mathbf{k})}{\partial \tau} - \frac{6}{\tau^2} \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{k}) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \delta_B}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \delta_B}{\partial \tau} - \frac{6}{\tau^2} \left[\frac{\bar{\rho}_C}{\rho_m} \delta_C + \frac{\bar{\rho}_B}{\rho_m} \delta_B \right] = -C_s^2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \delta_B. \quad \frac{\partial^2 \tilde{\delta}_B(\tau, \mathbf{k})}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \tilde{\delta}_B(\tau, \mathbf{k})}{\partial \tau} - \frac{6}{\tau^2} \tilde{\delta}(\tau, \mathbf{k}) = -C_s^2(\tau) k^2 \tilde{\delta}_B(\tau, \mathbf{k}).$$

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\delta}_B(\tau, \mathbf{k})}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \tilde{\delta}_B(\tau, \mathbf{k})}{\partial \tau} - \frac{6}{\tau^2} \left[\tilde{\delta}(\tau, \mathbf{k}) - \frac{k^2}{k_J^2} \tilde{\delta}_B(\tau, \mathbf{k}) \right] = 0 \quad \rightarrow k_J(\tau) = \frac{\sqrt{6}}{C_s(\tau)} \tau$$

Jeans Filtering Function (JFF)

$$(17) \quad g(\mathbf{k}, \tau) \equiv \frac{\tilde{\delta}_b(\mathbf{k}, \tau)}{\tilde{\delta}_c(\mathbf{k}, \tau)} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{(M. Shoji and E. Komatsu 2013)} \\ \text{(G. Somogyi and R. Smith 2010)} \end{matrix}$$



Aproximación lineal para el campo de materia y campo de velocidades peculiares.

El campo de velocidad peculiar, en la aproximación de perturbaciones lineales en ausencia de presión, satisface las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

Para el modelo de flujo ideal

$$\mathbf{v} = a(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{4\pi G \rho_B a(t)} \right) + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{a(t)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (19)$$

Ahora, si aplicamos la solución a la primera ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} a^2(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\rho_B a(t)} \right) = 4\pi G a(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

Conexión entre campos de materia y velocidades peculiares.

Para el campo de densidad la perturbación es la suma de dos términos

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \rho_B \delta \implies \delta \propto D_\alpha(t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a^2(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\rho_B a(t)} \right) = 4\pi G a(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \implies g_\alpha \propto \rho_B a(t) D_\alpha(t) \quad (22)$$

La velocidad asociada con cada modo es

⤴

$$(23) \quad v_\alpha = \frac{g_\alpha}{4\pi G \rho_B} \frac{1}{D_\alpha} \frac{dD_\alpha}{dt}$$

Universo Einstein - de Sitter

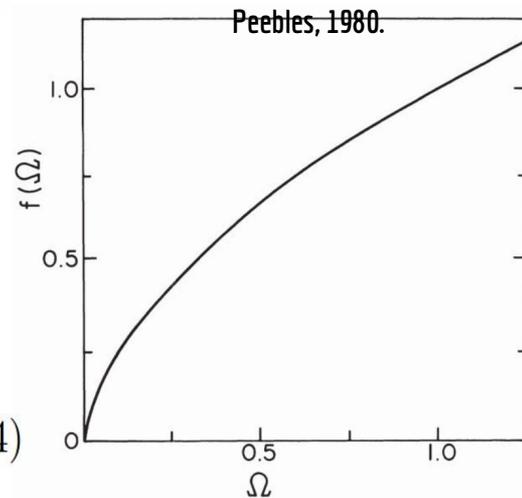
$$D_1 \propto t^{2/3} \implies \mathbf{v} = \mathbf{g}t \propto t^{1/3}$$

$$D_2 \propto t^{-1} \implies \mathbf{v} = -\frac{3}{2}\mathbf{g}t \propto t^{-4/3}$$

↙

$$\mathbf{v} = \frac{Hf}{4\pi G \rho_B} \mathbf{g} = \frac{2f}{3H\Omega} \mathbf{g}, \quad f \equiv \frac{a}{D} \frac{dD}{da} \quad (24)$$

Factor de crecimiento



Conexión entre campos de materia y velocidades peculiares.

Finalmente

Estimación Modelo Cosmológico

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} H(t) a(t) f(\Omega) \int d^3 x' \delta(x') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}$$

Inferir Ley de Hubble-Lemaître

Campo de velocidades peculiares
a gran escala

Irregularidades en densidad
a gran escala

Consideraciones Finales

1. La distribución estadística de velocidades peculiares puede ser directamente relacionada a las leyes naturales que gobiernan la evolución de sobredensidades primordiales.
2. La distribución estadística de velocidades peculiares permite una medida directa del crecimiento de estructura parametrizada por $P_{uu} \propto (fD\mu)^2$

¿Cómo puede utilizarse el campo de velocidades peculiares cosmológicas en el régimen no lineal para un fluido mixto de materia oscura fría y materia bariónica en la reconstrucción del espectro de potencia de materia?

¿Cuál podría ser el nivel de precisión alcanzado en el factor de crecimiento si se consideran los modos de evolución no lineal en la teoría de perturbaciones estándar?

Referencias

1. Angulo, R. and Hahn, O. (2022). Large-Scale Dark Matter Simulations. Springer Science and Business Media LLC.
2. Carr, A., Davis, T.M., Scolnic, D. et al. (2022). The Pantheon+ analysis: Improving the redshifts and peculiar velocities of Type Ia supernovae used in cosmological analyses. Publications of the Astronomical Society of Australia, 39, e046. doi:10.1017/pasa.2022.41.
3. Carrick, J., Turnbull, S.J., Lavaux, G. and Hudson, M.J. (2015). Cosmological parameters from the comparison of peculiar velocities with predictions from the 2M++ density field. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 450(1), pp.317-332. Oxford University Press (OUP). doi:10.1093/mnras/stv547.
4. Courtois, H.M., Dupuy, A., Guinet, D., Baulieu, G., Ruppin, F. and Brenas, P. (2023). Gravity in the local Universe: Density and velocity fields using CosmicFlows-4. Astronomy & Astrophysics. https://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2023/02/aa45331-22/aa45331-22.html
5. Dodelson, S. and Schmidt, F. (2020). Modern Cosmology, Elsevier Science.
6. Fonseca, D. and Castañeda, L. (2023). Revisión a la teoría de perturbaciones cosmológicas. Introducción a CLASS (The Cosmic Linear Anisotropy Solving System). eSPECTRA.
7. Fonseca, D. and Castañeda, L. (2024). A Brief Review of First-Order Cosmological Perturbations Including Baryonic
8. Matter From an Eulerian Perspective. Momento, (69), pp. 17–46. doi: 10.15446/mo.n69.111610.
9. Howlett, C., Said, K., Lucey, J.R., Colless, M., Qin, F., Lai, Y., Tully, R.B. and Davis, T.M. (2022). The Sloan Digital Sky Survey peculiar velocity catalogue. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 515(1), pp.953-976. Oxford University Press (OUP). doi:10.1093/mnras/stac1681.
10. Huterer, D. (2023). A Course in Cosmology: From Theory to Practice. Cambridge: Cambridge University Press.
11. Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. (1973). Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman.
12. Peebles, J. (1980). The Large-Scale Structure of the Universe. Princeton: Princeton University Press.
13. Mukhanov, V.F., Feldman, H.A. and Brandenberger, R.H. (1992). Theory of cosmological perturbations. Physics Reports, 215(5-6), pp.203-333.
14. Bernardeau, F., Colombi, S., Gaztanaga, E. and Scoccimarro, R. (2002). Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory. Amsterdam: Elsevier.
15. Shoji, M. and Komatsu, E. (2009). Third-order perturbation theory with nonlinear pressure. Physical Review D, 700, July. The American Astronomical Society.
16. Somogyi, G. and Smith, R.E. (2010). Cosmological perturbation theory for baryons and dark matter: One-loop
17. corrections in the renormalized perturbation theory framework. Physical Review D, 18, January. American Physical Society.
18. Weinberg, S. (2008). Cosmology. Oxford: Oxford University Press Inc.

Muchas Gracias

Courtois et al, 2013.

