

Un método para determinar la órbita solar ptolemaica a partir tres observaciones cualesquiera

José Gregorio Portilla

Observatorio Astronómico Nacional

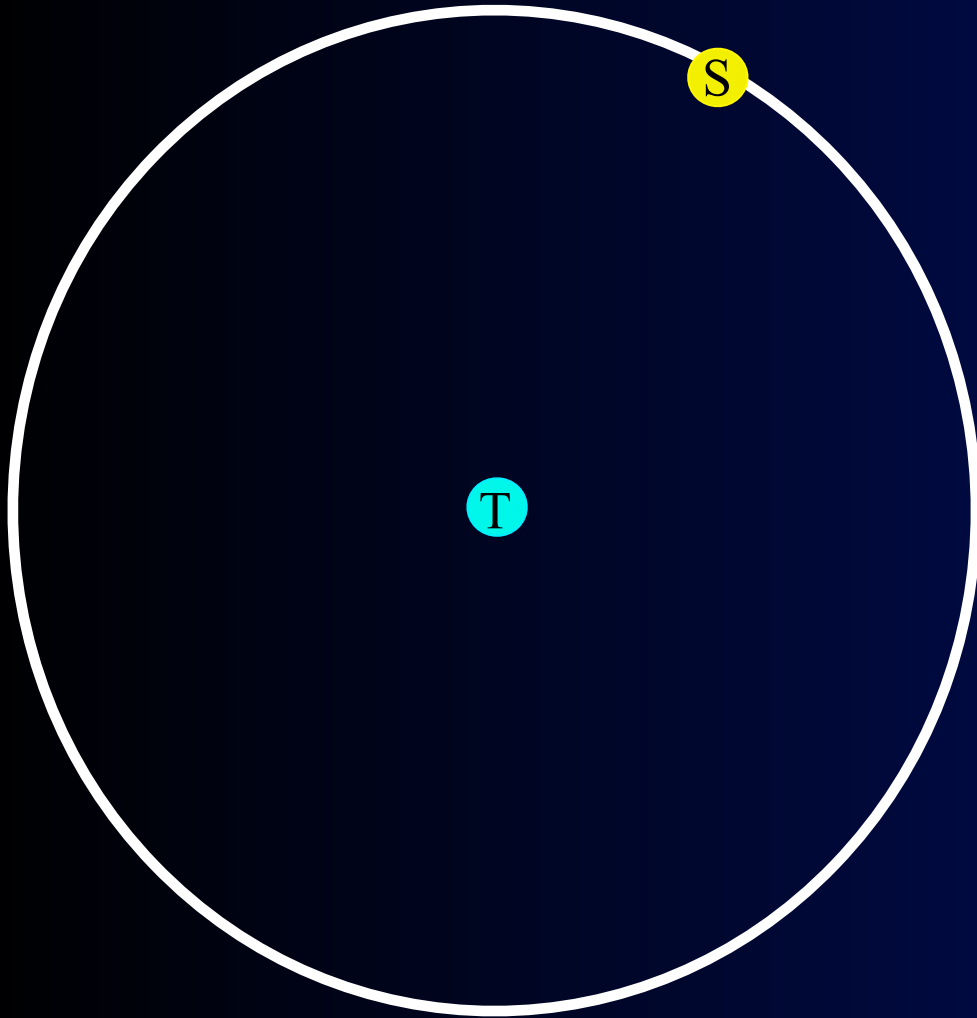
Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Objetivos de esta exposición:

- Mostrar en qué consiste la órbita solar de Ptolomeo
- Describir el método que se encontró para determinar los parámetros de la órbita solar ptolemaica
- Mostrar cuál fue la motivación para encontrar tal método

Los antiguos griegos intentaron describir el movimiento de los cuerpos celestes bajo dos premisas:

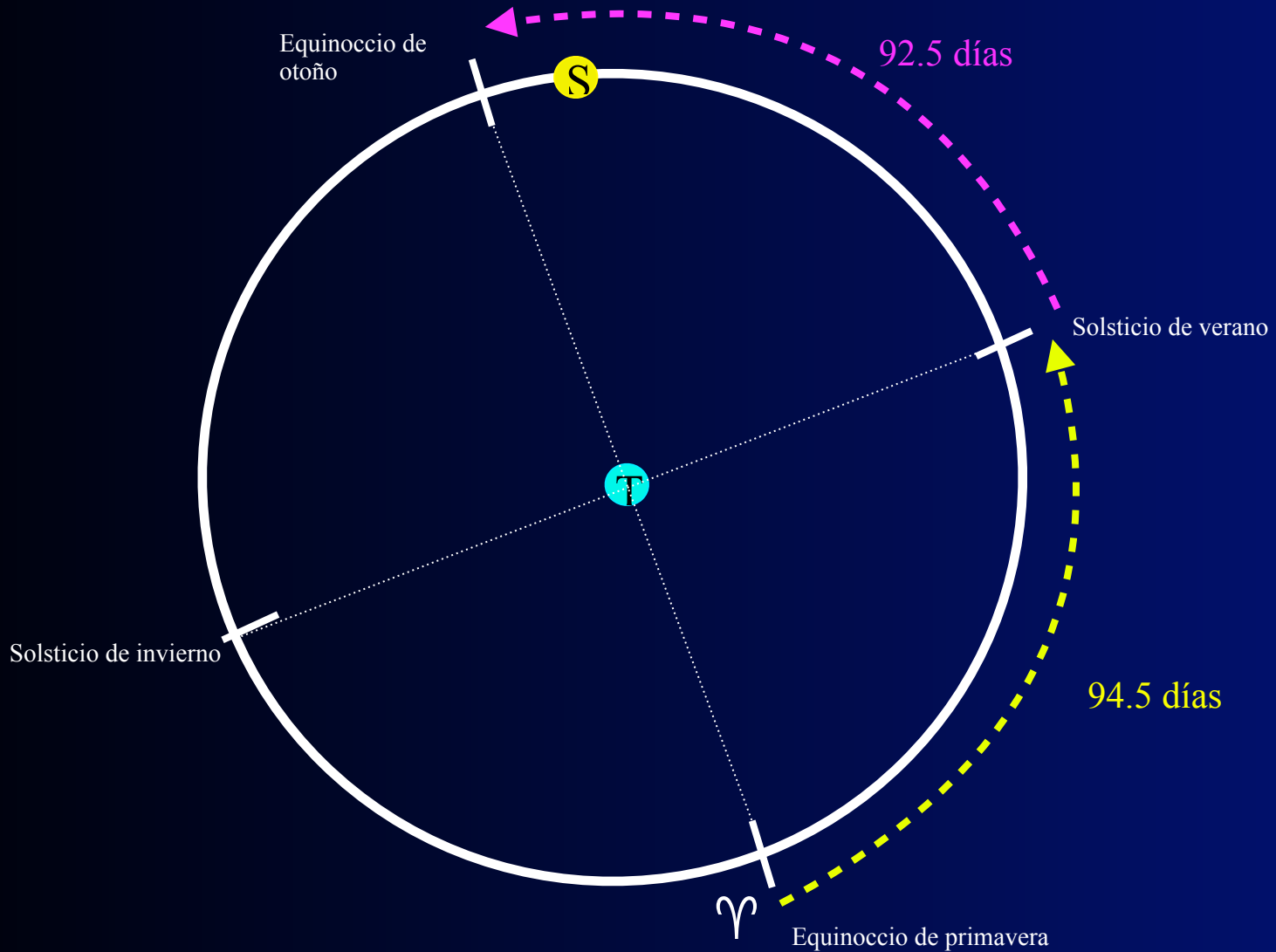


- La Tierra (T) es el centro del Universo

- El movimiento de los cuerpos celestes, incluyendo el Sol (S), siguen trayectorias circulares y uniformes

Pero Hiparco (siglo II a.C.) notó que el movimiento del Sol no es uniforme a lo largo del año

(El Sol se acelera y desacelera a lo largo del año)

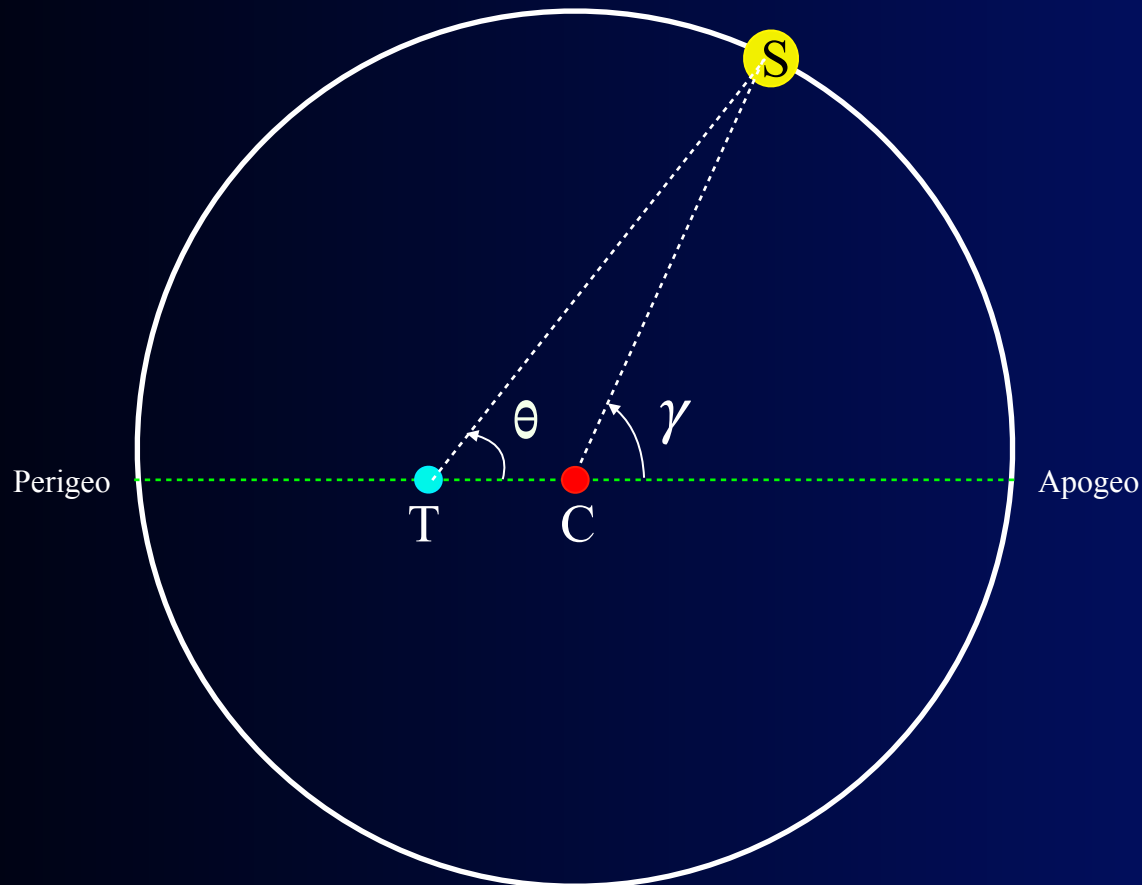


Hipótesis excéntrica de Hiparco

El Sol se mueve uniformemente en una órbita circular con centro en C (y no en T)

El ángulo γ es directamente proporcional al tiempo

Pero el ángulo θ (centrado en la Tierra) no es función lineal del tiempo, lo que permite explicar la aceleración y desaceleración del Sol

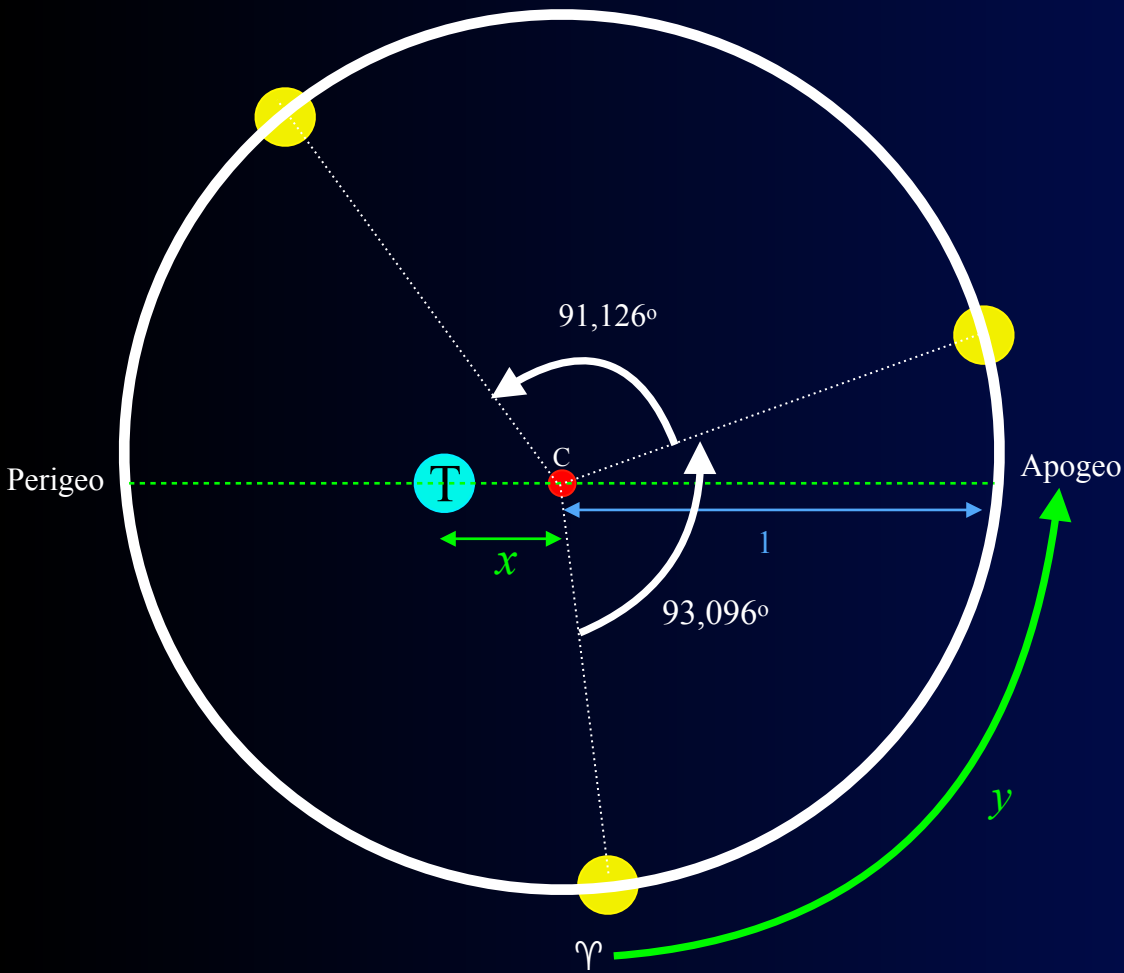


Ptolomeo determinó la duración del año: 365^d 5^h 55^m 12^s



Velocidad angular del Sol: 0,98515 °/d
(constante con respecto a C)

Conociendo los dos ángulos entre las tres posiciones y asignando el radio de la órbita igual a la unidad es posible determinar x y y



x = excentricidad de la órbita solar

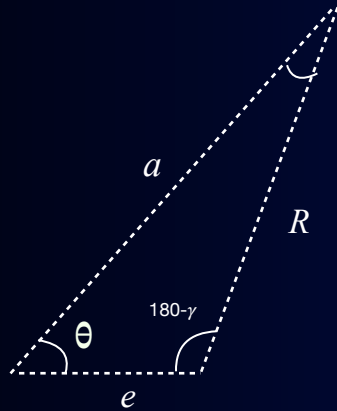
y = distancia angular entre el punto vernal y el apogeo solar

Ptolomeo encontró (Almagesto III, 4):

x (excentricidad, e) = $1/24 = 0,0417$

y (λ_a) = $65,5^\circ$

La relación entre θ y γ es fácil de hallar



Teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \gamma}{a} = \frac{\text{sen } \theta}{R}, \quad (1)$$

Teorema del coseno:

$$a = R \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma}, \quad (2)$$

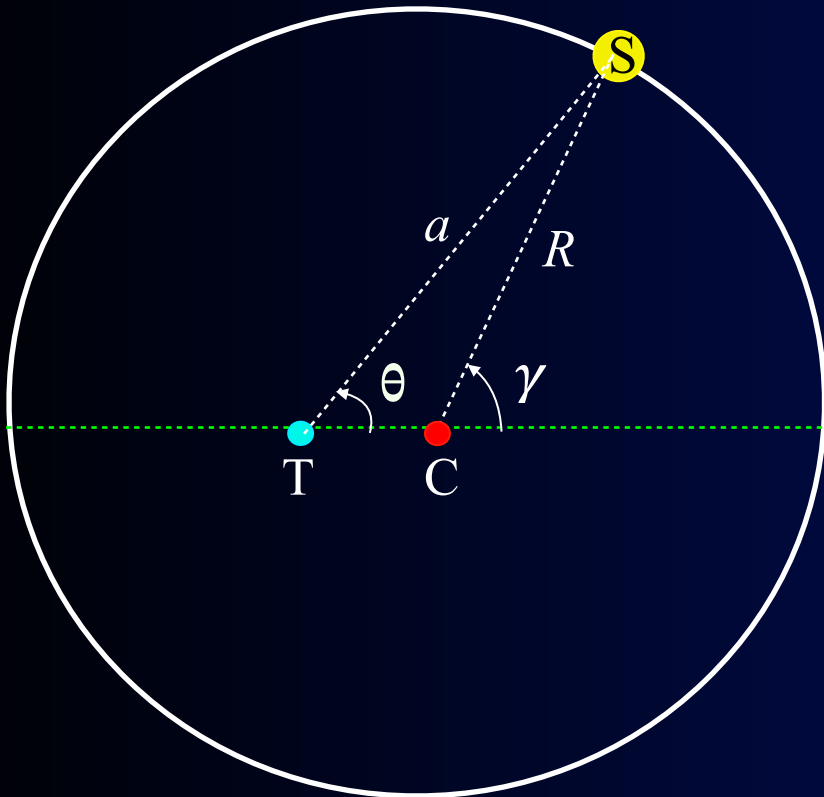
El ángulo γ es función lineal del tiempo t

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{360^\circ}{T_t} (t - t_0),$$

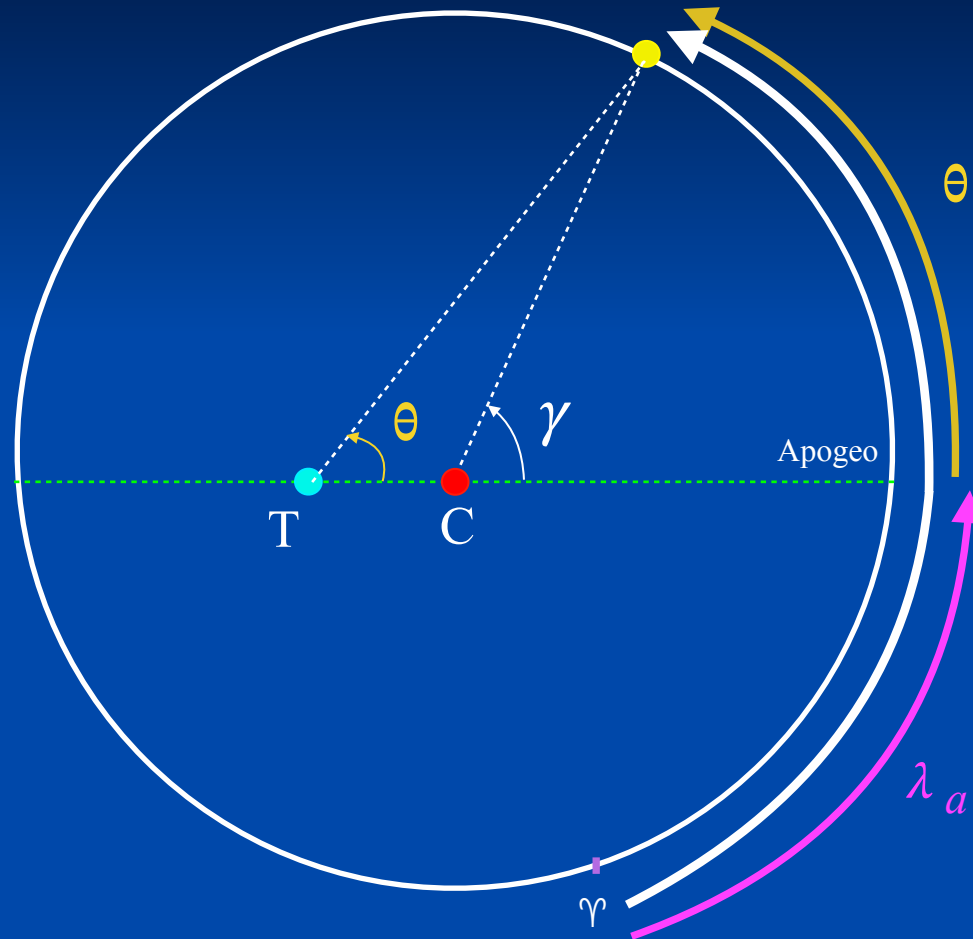
Entonces (1) queda como (con $R=1$)

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } \gamma}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma}},$$

Pero θ queda dado con respecto al apogeo

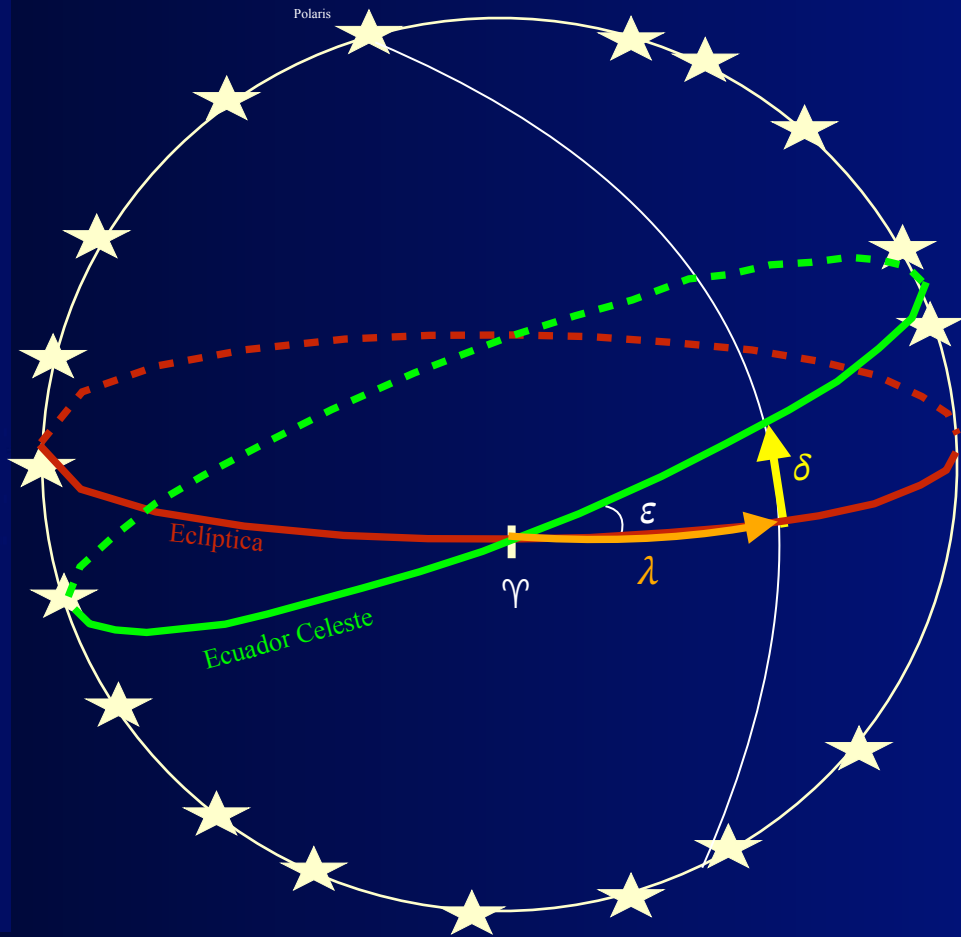
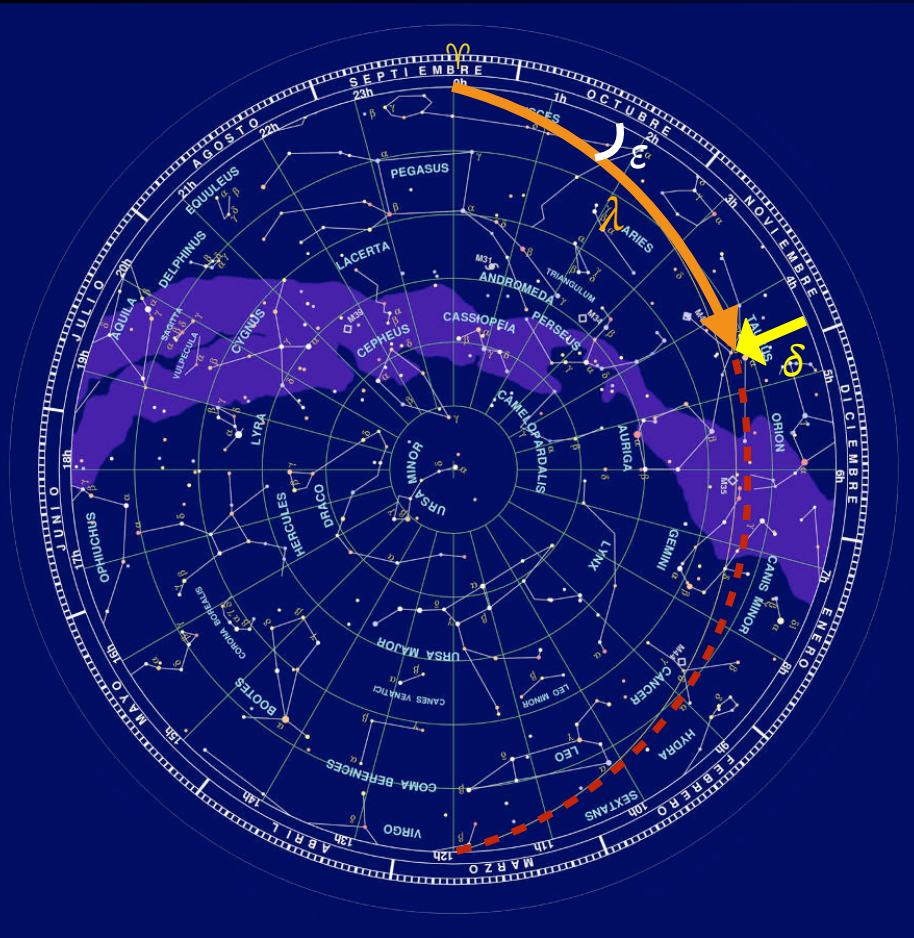


Pero para efectos de encontrar la longitud eclíptica (λ), se requiere el conocimiento de la posición del apogeo con respecto al punto vernal (Υ)



$$\lambda = \lambda_a + \theta$$

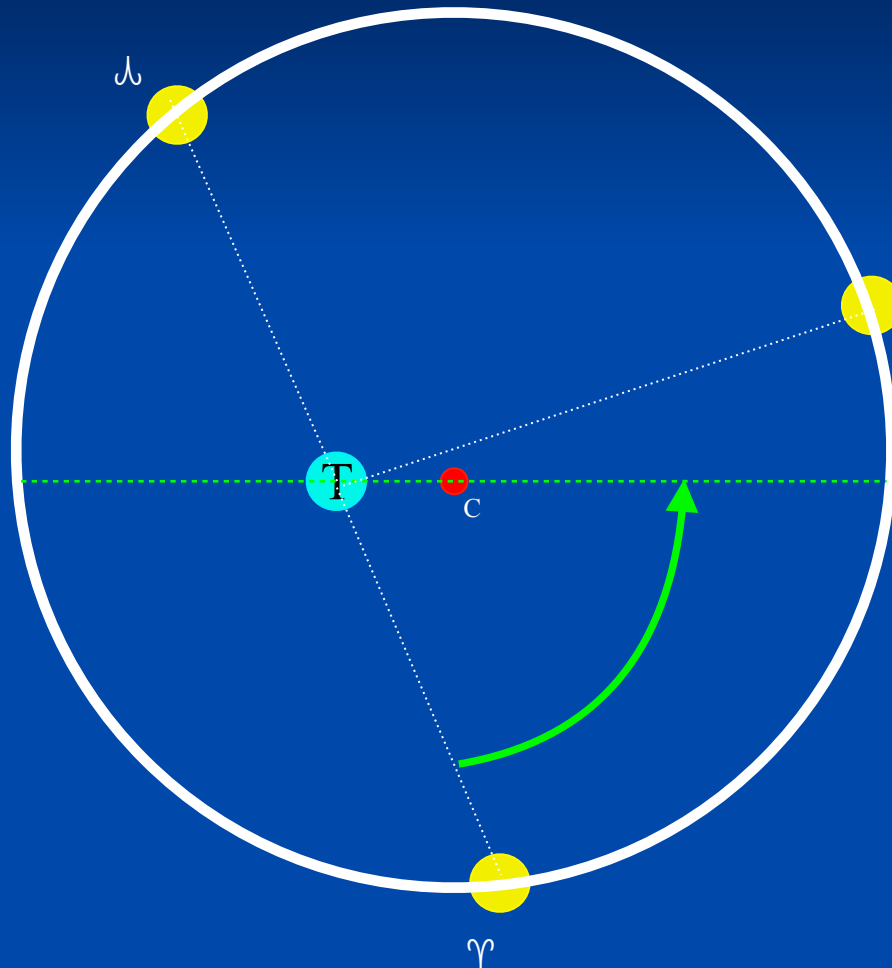
Si se conoce la longitud (λ) la declinación (δ) es fácil de hallar aplicando trigonometría esférica



- ϵ : Oblicuidad de la eclíptica
- λ : longitud eclíptica
- δ : declinación

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \lambda \text{ sen } \epsilon$$

En resumen, con tres posiciones **convenientes** del Sol ($\lambda = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$), Hiparco y Ptolomeo determinaron los parámetros de la órbita solar ($e, \lambda_a, \gamma_0(t_0)$)



Conocidos los parámetros, se puede determinar la longitud del Sol para cualquier tiempo t

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{360^\circ}{T_t} (t - t_0),$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } \gamma}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma}},$$

$$\lambda = \lambda_a + \theta$$

El modelo del movimiento del Sol, a lo largo de los siguientes 1300 años, siguió siendo el de Ptolomeo

En esencia, los modelos del movimiento solar son idénticos al de Ptolomeo

Las observaciones de astrónomos indios y árabes condujeron a ligeras modificaciones de los valores de los elementos

$(T, \quad e, \quad \lambda_a, \quad \gamma_0(t_0))$

Duración
del año

Excentricidad

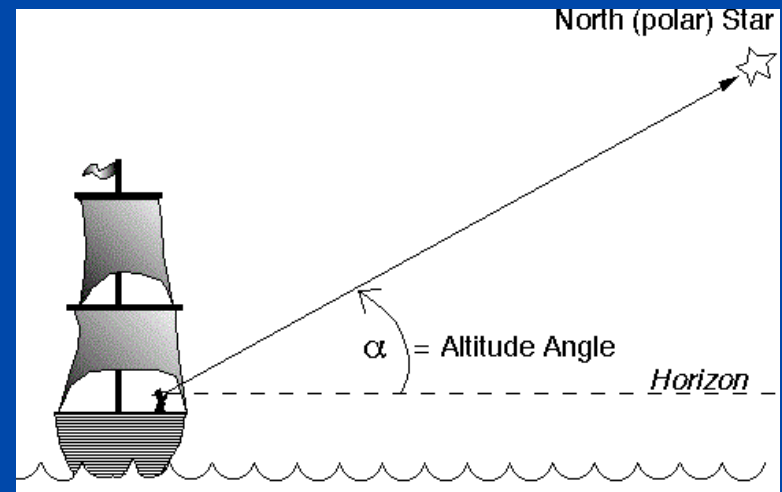
Longitud
del apogeo

γ_0 en la fecha
Radix

Poseer una teoría fiable del movimiento del Sol fue fundamental para Portugal en el siglo XV



Los marineros ya sabían que una forma de conocer la latitud en altamar es determinar la altura de la estrella polar con respecto al horizonte



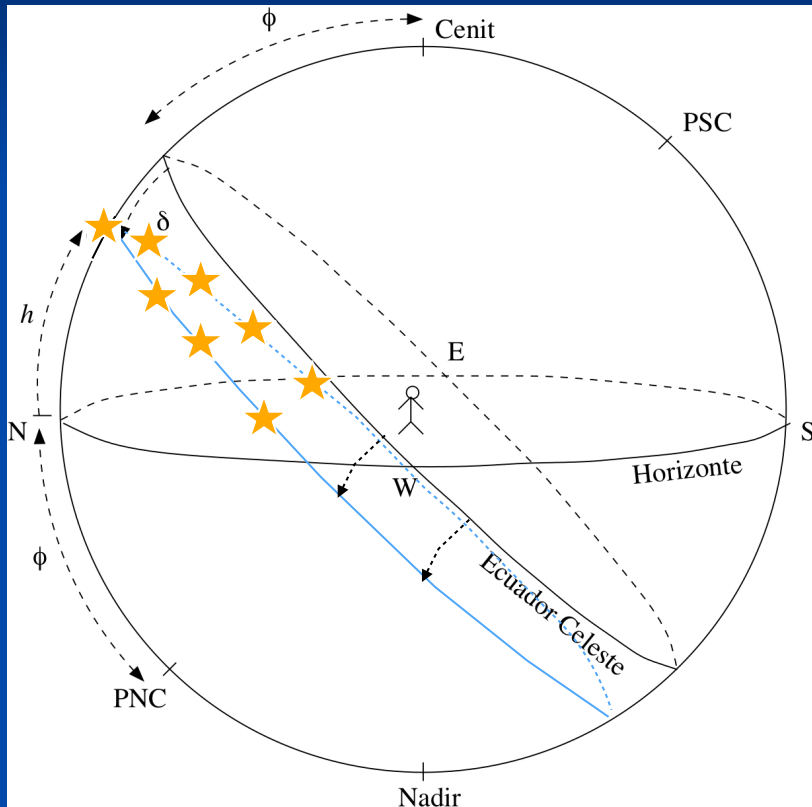
¿Y qué ocurre cuando se atraviesa el ecuador hacia el hemisferio sur?

(La estrella polar está por debajo del horizonte)



Los astrónomos ofrecieron una solución genial

Determinar la altura de un astro en el momento de su culminación



$$h + \delta + \phi = 90$$

Altura del astro
en culminación
(se mide)

Declinación
(libro,
derivado de
una teoría)

Latitud

Y así:

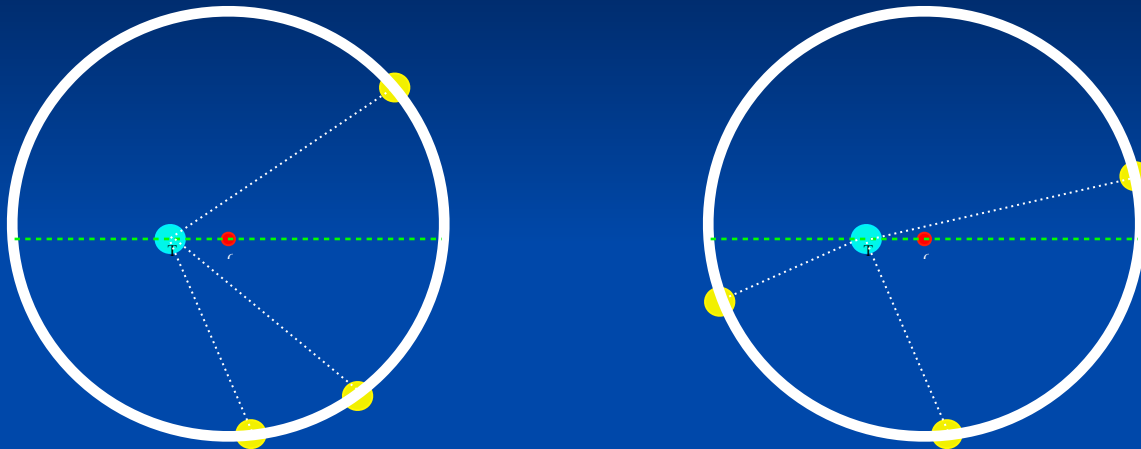
$$\phi = 90 - h - \delta$$

Sin embargo, el método no funciona bien con las estrellas, sino con el **Sol**

¿Por qué el **Sol**?

1. Porque observar las **estrellas** y los **planetas** en la noche implica demarcar bien el horizonte (difícil)
2. Porque observar la **Luna** exige contar con una teoría del movimiento lunar (difícil). Además, no siempre se ve

¿Es posible encontrar un procedimiento que permita, a partir de tres posiciones del Sol cualesquiera, hallar los parámetros orbitales de la órbita ptolemaica?



Si se pudiera, podría arrojar luces sobre cómo fueron construidas las tablas de Zacuto

Esto es, determinar cuáles fueron los parámetros orbitales que permitieron construir las tablas de Zacuto

Tabula prima solis cuius radij e anno 1473

die mensis	marsi ⁹		aplis aries		maius tanrus		iunius gemini		iulius cancer		august ⁹ leo							
	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m						
	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m						
1	20	26	30	20	54	0	19	51	7	19	25	4	17	55	52	17	32	38
2	21	25	59	21	52	24	20	48	36	20	22	5	18	52	55	18	30	17
3	22	25	28	22	50	48	21	46	5	21	19	7	19	49	58	19	27	56
4	23	24	56	23	49	8	22	43	34	22	16	8	20	47	2	20	25	36
5	24	24	21	24	47	28	23	41	2	23	13	9	21	44	6	21	23	18
6	25	23	46	25	45	48	24	38	30	24	10	11	22	41	12	22	21	0
7	26	23	11	26	44	0	25	35	54	25	7	12	23	38	19	23	18	42
8	27	22	26	27	42	11	26	33	17	26	4	13	24	35	26	24	16	32
9	28	21	41	28	40	22	27	30	40	27	1	15	25	32	37	25	14	22
10	29	20	55	29	38	26	28	28	0	27	58	17	26	29	48	26	12	12
11	Yo	20	3	10	36	30	29	25	19	26	55	13	27	27	0	27	10	4
12	1	19	11	1	34	35	10	22	38	29	52	20	28	24	13	28	7	57
13	2	18	19	2	32	32	1	19	54	30	49	21	29	21	26	29	5	50
14	3	17	18	3	30	29	2	17	10	1	46	22	30	18	40	30	3	53
15	4	16	16	4	28	25	3	14	25	2	43	23	1	15	59	1	1	56
16	5	15	14	5	26	16	4	11	37	3	40	24	2	13	19	2	0	0
17	6	14	7	6	24	7	5	8	49	4	37	25	3	10	37	2	56	5
18	7	13	0	7	21	53	6	6	0	5	34	26	4	7	58	3	56	11
19	8	11	53	8	19	44	7	3	9	6	31	28	5	5	19	4	54	17
20	9	10	40	9	17	29	8	0	18	7	28	30	6	2	40	5	52	36
21	10	9	25	10	15	14	8	57	27	8	25	31	7	0	6	50	54	
22	11	8	10	11	12	54	9	54	32	9	22	32	7	57	33	7	49	13
23	12	6	52	12	10	34	10	51	36	10	19	34	8	55	0	8	47	36
24	13	5	34	13	8	14	11	48	40	11	16	35	9	52	28	9	45	58
25	14	4	16	14	5	51	12	45	44	12	13	37	10	49	57	10	44	29
26	15	2	6	15	3	27	13	42	48	13	10	39	11	47	26	11	42	49
27	16	1	26	16	1	3	14	39	51	14	7	41	12	44	57	12	41	18
28	17	0	16	17	58	35	15	36	54	15	4	43	13	42	28	13	39	48
29	17	58	32	17	56	6	16	33	57	16	1	46	14	40	0	14	38	20
30	18	57	3	18	53	37	17	31	0	16	58	49	15	37	32	15	36	52
31	19	55	34	0	0	13	28	2	0	0	16	35	5	16	35	24		

Parámetros

e
 λ_a
 $\gamma_0(t_0)$



t_1
 t_2
 t_3
 \vdots
 t_n

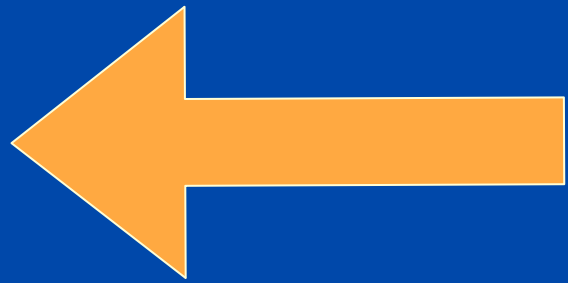


Posición

λ_1
 λ_2
 λ_3
 \vdots
 λ_n

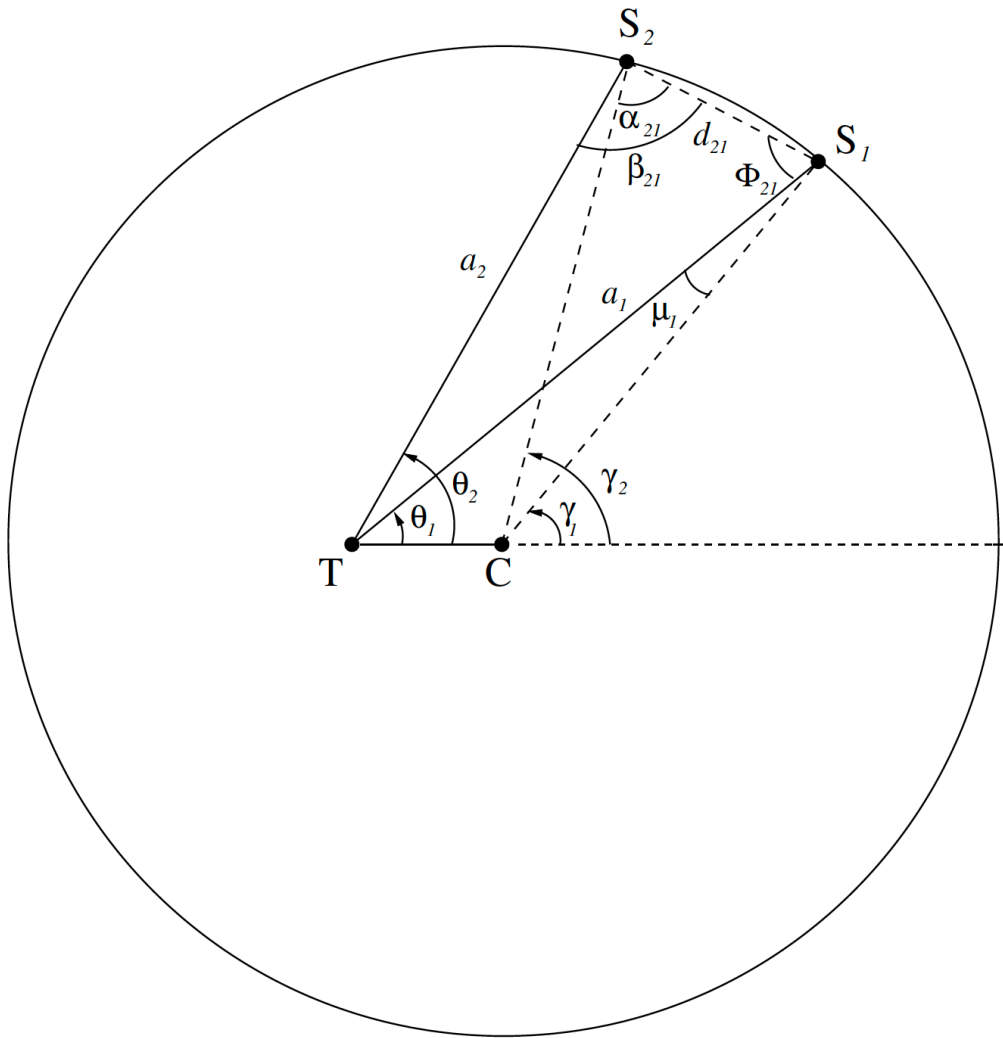
Determinación orbital

e
 λ_a
 $\gamma_0(t_0)$



Tabula prima solis cuius radij e anno 1473

die mensis	marsi		aplis		maius		iunias		iulius		augustus								
	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m							
1	20	26	30	20	54	0	19	51	7	19	25	4	17	55	52	17	32	38	
2	21	27	59	21	52	24	20	48	36	20	22	5	18	52	55	18	30	17	
3	22	25	28	21	50	48	21	46	5	21	19	7	19	49	58	19	27	56	
4	23	24	50	23	49	8	22	43	34	22	16	8	20	47	2	20	25	30	
5	24	24	21	24	47	28	23	41	2	23	13	9	21	44	6	21	23	18	
6	25	23	40	25	45	48	24	38	30	24	10	11	22	41	12	22	21	0	
7	26	23	11	26	44	0	25	35	54	25	7	12	23	38	19	23	18	42	
8	27	22	20	27	42	11	26	33	17	26	4	13	24	35	26	24	16	32	
9	28	21	41	28	40	22	27	30	40	27	1	14	25	32	37	25	14	22	
10	29	20	55	29	38	20	28	28	28	28	58	17	26	29	48	26	12	12	
11	30	20	3	30	36	36	29	25	19	20	55	19	27	27	0	27	10	4	
12	1	19	11	1	34	35	30	22	38	29	52	20	28	24	13	28	7	57	
13	2	18	19	2	32	32	1	19	54	30	49	21	29	21	26	29	5	50	
14	3	17	18	3	30	29	2	17	10	1	46	21	30	18	40	30	3	53	
15	4	16	16	4	28	25	3	14	25	2	43	23	1	15	59	1	1	56	
16	5	15	14	5	26	19	4	11	37	3	40	24	2	13	18	2	0	0	
17	6	14	7	6	24	7	5	8	49	4	37	25	3	10	37	2	56	5	
18	7	13	0	7	21	5	6	6	0	5	34	26	4	7	58	3	56	11	
19	8	11	53	8	19	44	7	3	9	0	31	28	5	5	19	4	54	17	
20	9	10	40	9	17	29	8	0	18	7	28	29	6	2	40	5	52	26	
21	10	9	26	10	15	14	8	0	7	22	8	25	7	0	6	6	50	34	
22	11	8	10	11	12	54	9	0	34	32	9	22	32	7	57	33	7	49	14
23	12	6	5	12	10	34	10	0	1	36	10	19	34	8	55	0	8	47	30
24	13	5	34	13	8	14	11	48	40	11	16	35	9	52	28	9	45	58	
25	14	4	16	14	5	5	12	45	44	12	13	37	10	49	57	10	44	20	
26	15	2	4	15	3	2	13	42	43	13	10	39	11	47	20	11	42	49	
27	16	1	20	16	1	3	14	39	51	14	7	41	12	44	57	12	41	18	
28	17	0	1	16	58	35	15	36	54	15	4	43	13	42	28	13	39	48	
29	17	58	32	17	56	6	16	33	57	16	1	46	14	40	0	14	38	20	
30	18	57	2	18	53	37	17	31	0	16	58	40	15	37	32	15	36	52	
31	19	55	34	0	0	0	13	28	2	0	0	16	35	5	16	35	24		



Para S_2 y S_1 :

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{360^\circ}{T_t}(t_2 - t_1),$$

Para S_3 y S_2 :

$$\gamma_3 - \gamma_2 = \frac{360^\circ}{T_t}(t_3 - t_2),$$

Para S_3 y S_1 :

$$\gamma_3 - \gamma_1 = \frac{360^\circ}{T_t}(t_3 - t_1),$$

Y las cuerdas entre los S_i y S_j :
(CS_i y $CS_j = 1$)

$$d_{21} = \sqrt{2[1 - \cos(\gamma_2 - \gamma_1)]},$$

$$d_{32} = \sqrt{2[1 - \cos(\gamma_3 - \gamma_2)]},$$

$$d_{31} = \sqrt{2[1 - \cos(\gamma_3 - \gamma_1)]},$$

$$\lambda = \lambda_a + \theta$$



$$\theta_2 - \theta_1 = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \lambda_3 - \lambda_2,$$

$$\theta_3 - \theta_1 = \lambda_3 - \lambda_1,$$

Del teorema del coseno se obtiene:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - d_{21}^2 &= 0, \\ a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) - d_{32}^2 &= 0, \\ a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) - d_{31}^2 &= 0. \end{aligned}$$

conocido conocido

que constituye un sistema lineal 3X3 siendo las incógnitas a_1, a_2, a_3 .

Originalmente se encontró la solución con *Mathematica*

$$x^2 + y^2 + x y \times (-1,9326424125976) - 0,0662169581872396 = 0$$

$$x^2 + z^2 + x z \times (-1,7324821302068691) - 0,2604831471973883 = 0$$

$$y^2 + z^2 + y z \times (-1,9312808078830725) - 0,0662169581872396 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= -5,37702 \times 10^6 - 1,58107 \times 10^6 i \quad y \\ y &= -5,6028 \times 10^6 - 144100, i \quad y \quad z = -5,44774 \times 10^6 + 1,31692 \times 10^6 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -5,37702 \times 10^6 + 1,58107 \times 10^6 i \quad y \\ y &= -5,6028 \times 10^6 + 144100, i \quad y \quad z = -5,44774 \times 10^6 - 1,31692 \times 10^6 i \end{aligned}$$

$$x = -0,995828 \quad y = -0,985636 \quad y \quad z = -0,97636$$

$$x = -0,989848 \quad y = -0,920023 \quad y \quad z = -0,98354$$

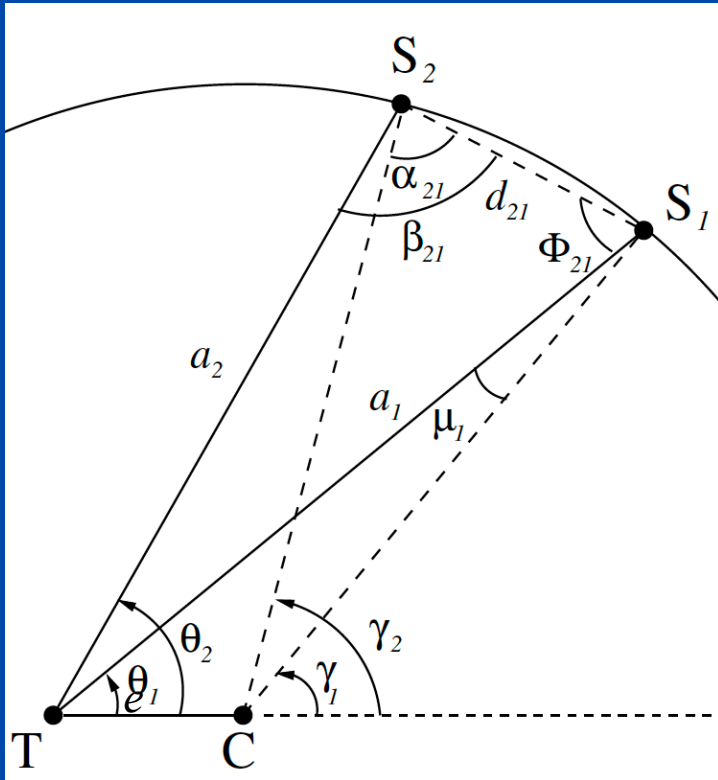
$$x = 0,989848 \quad y = 0,920023 \quad y \quad z = 0,98354$$

Pero se vio que el proceso así desarrollado era altamente ineficiente

$$\begin{aligned}
 a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - d_{21}^2 &= 0, \\
 a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) - d_{32}^2 &= 0, \\
 a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) - d_{31}^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

conocido conocido

Se encontró siempre una solución única a través de `fsolve` de Python con valores de arranque próximos a 1.



Hallados a_1 , a_2 , a_3 es inmediato encontrar la excentricidad:

$$\alpha_{21} = \frac{180^\circ - (\gamma_2 - \gamma_1)}{2},$$

$$\beta_{21} = \text{sen}^{-1} \left[\frac{a_1 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{d_{21}} \right].$$

$$e = \sqrt{1 + a_2^2 - 2a_2 \cos(\beta_{21} - \alpha_{21})}.$$

$$a = R \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma},$$



$$\gamma_i = \cos^{-1} \left(\frac{a_i^2 - 1 - e^2}{2e} \right), \quad (\text{con } R=1)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } \gamma}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma}},$$



$$\theta_i = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\text{sen } \gamma_i}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma_i}} \right).$$

La longitud del apogeo se halla a partir de:

$$\lambda = \lambda_a + \theta$$



$$(\lambda_a)_i = \lambda_i - \theta_i.$$

Y el valor de γ_0 para la fecha arbitraria t_0 , con:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{360^\circ}{T_t} (t - t_0),$$



$$\gamma_0 = \gamma_i - \frac{360^\circ}{T_t} (t_i - t_0),$$

Por lo tanto, frente a la pregunta: ¿es posible disponer de un procedimiento algebraico que permita a partir de tres valores cualesquiera, conocer unívocamente los parámetros de la órbita solar de Ptolomeo?

Respuesta: si!

Tabula prima solis cur⁹ radij ē anno 1473

Dies mēsi ⁹	marti ⁹		aplis		maius		iunius		iulius		august ⁹							
	pices		aries		taurus		gemini		cancer		leo							
	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m						
1	20	26	30	20	54	0	19	51	7	19	25	4	17	55	52	17	32	38
2	21	25	59	21	52	24	20	48	36	20	22	5	18	52	55	18	30	17
3	22	25	28	22	50	48	21	46	5	21	19	7	19	49	58	19	27	56
4	23	24	56	23	49	8	22	43	34	22	16	8	20	47	2	20	25	36
5	24	24	21	24	47	28	23	41	2	23	13	9	21	44	6	21	23	18
6	25	23	46	25	45	49	24	38	30	24	10	11	22	41	12	22	21	0
7	26	23	11	26	44	0	25	37	54	25	7	12	23	38	19	23	18	42
8	27	22	26	27	42	11	26	33	17	26	4	13	24	35	26	24	16	32
9	28	21	41	28	40	22	27	30	40	27	1	15	25	32	37	25	14	22
10	29	20	55	29	38	26	28	28	0	27	58	17	26	29	48	26	12	12
11	Yo	20	3	30	36	30	29	25	19	26	55	19	27	27	0	27	10	4
12	1	19	11	1	34	35	10	22	38	29	52	20	28	24	13	28	7	57
13	2	18	19	2	32	32	1	19	54	30	49	21	29	21	26	29	5	50
14	3	17	18	3	30	29	2	17	10	1	46	22	30	18	40	30	3	53
15	4	16	16	4	28	25	3	14	25	2	43	23	1	15	59	1	1	56
16	5	15	14	5	26	16	4	11	37	3	40	24	2	13	18	2	0	0
17	6	14	7	6	24	7	5	8	49	4	37	25	3	10	37	2	58	5
18	7	13	0	7	21	58	6	6	0	5	34	26	4	7	58	3	56	11
19	8	11	53	8	19	44	7	3	9	6	31	28	5	5	19	4	54	17
20	9	10	40	9	17	29	8	0	18	7	28	30	6	2	40	5	52	36
21	10	9	25	10	15	14	8	57	27	8	25	31	7	0	6	6	50	54
22	11	8	10	11	12	54	9	54	32	9	22	32	7	57	33	7	49	14
23	12	6	52	12	10	34	10	51	36	10	19	34	8	55	0	8	47	36
24	13	5	34	13	8	14	11	48	40	11	16	35	9	52	28	9	45	58
25	14	4	16	14	5	51	12	45	44	12	13	37	10	49	57	10	44	20
26	15	2	51	15	3	27	13	42	48	13	10	39	11	47	26	11	42	49
27	16	1	26	16	1	3	14	39	51	14	7	41	12	44	57	12	41	18
28	17	0	11	16	58	35	15	56	54	15	4	43	13	42	28	13	39	48
29	17	58	32	17	56	6	16	33	57	16	1	46	14	40	0	14	38	20
30	18	57	3	18	53	37	17	31	0	16	58	49	15	37	32	15	36	52
31	19	55	34	0	0	13	28	2	0	0	16	35	5	16	35	24		

¿Cuáles fueron los parámetros que Abraham Zacuto utilizó para la elaboración de sus tablas de longitud del Sol?



Pero, ¿cuáles datos específicamente se adoptan, pues las opciones son muchísimas?

Se utilizaron dos estrategias

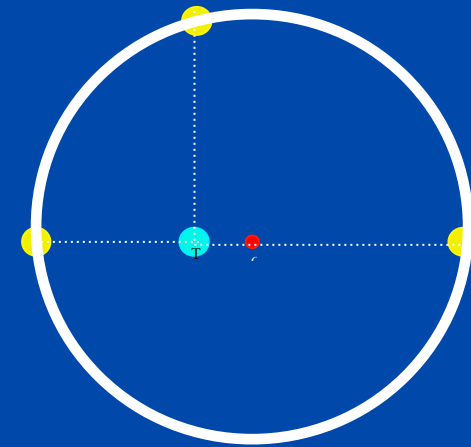
1. Datos separados aproximadamente por un tres meses

Tabula prima solis cur⁹ radij e anno 1473

Dies	marii ⁹		aplis		maius		iunius		iulius		august ⁹	
	pices		aries		taurus		gemini		cancer		leo	
	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m
1	20	26	30	20	54	0	19	51	7	19	25	4
2	21	25	59	21	52	24	20	48	36	20	22	5
3	22	25	28	22	50	48	21	46	5	21	19	7
4	23	24	56	23	49	8	22	43	34	22	16	8
5	24	24	21	24	47	28	23	41	2	23	13	9
6	25	23	46	25	46	48	24	38	30	24	10	11
7	26	23	11	26	44	0	25	37	54	25	7	
8	27	22	26	27	42	11	26	33	17	26	4	
9	28	21	41	28	40	22	27	30	40	27	1	
10	29	20	55	29	38	26	28	28	0	27	58	
11	Yo	20	3	00	36	30	25	19	26	55	13	
12	1	19	11	1	34	35	10	22	38	29	52	
13	2	18	19	2	32	22	10	20	49	21	29	
14	3	17	18	3	30	29	2	17	10	1	46	
15	4	16	16	4	28	25	3	14	25	2	43	
16	5	15	14	5	26	16	4	11	37	3	40	
17	6	14	7	6	24	7	5	8	49	4	37	
18	7	13	0	7	21	58	6	6	0	5	34	
19	8	11	53	8	19	44	7	3	9	6	31	
20	9	10	40	9	17	29	8	0	18	7	28	
21	10	9	25	10	15	14	8	57	27	8	25	
22	11	8	10	11	12	54	9	54	32	9	22	
23	12	6	52	12	10	34	10	51	36	10	19	
24	13	5	34	13	8	14	11	48	40	11	16	
25	14	4	16	14	5	11	12	45	44	12	13	
26	15	2	51	15	3	27	13	42	48	13	10	
27	16	1	26	16	1	3	14	39	51	14	7	
28	17	0	1	16	58	35	15	36	54	15	4	
29	17	58	32	17	56	6	16	33	57	16	1	
30	18	57	3	18	53	37	17	31	0	16	58	
31	19	55	34	0	0	13	28	2	0	0	16	

Residuz tabule prime Solis

Dies	septēb		octob		nouēb		deceb		Januā		februā	
	xgo		libra		scopi ⁹		sagita		capcō		aqri ⁹	
	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m	g	m
1	17	34	4	17	9	19	16	19	45	18	54	32
2	18	32	44	18	9	21	19	20	30	19	55	56
3	19	31	24	19	8	45	20	21	24	20	57	22
4	20	30	7	20	8	40	21	22	19	21	58	48
5	21	28	51	21	8	36	22	23	14	23	0	15
6	22	27	35	22	8	32	23	24	10	24	1	42
7	23	26	25	23	8	30	24	25	7	25	3	9
8	24	25	16	24	8	41	25	26	4	26	4	37
9	25	24	7	25	8	46	26	27	9	27	6	7
10	26	23	2	26	8	53	27	28	14	28	7	37
11	27	21	57	27	9	0	28	29	20	29	9	7
12	28	20	52	28	9	7	29	30	31	30	10	37
13	29	19	57	29	9	22	30	31	42	1	12	7
14	30	18	3	30	0	37	1	32	52	2	13	38
15	1	18	9	1	9	52	2	34	7	3	15	8
16	2	17	19	2	10	11	3	35	21	4	16	38
17	3	16	29	3	10	30	4	36	35	5	18	8
18	4	15	40	4	10	50	5	37	49	6	19	30
19	5	15	2	5	11	19	6	39	3	7	21	4
20	6	14	25	6	11	49	7	40	18	8	22	32
21	7	13	48	7	12	19	8	41	33	9	24	0
22	8	13	14	8	12	56	9	42	46	10	25	26
23	9	12	41	9	13	33	10	44	3	11	26	52
24	10	12	8	10	14	6	11	45	18	12	28	16
25	11	11	40	11	14	47	12	46	33	13	29	40
26	12	11	13	12	15	29	13	47	48	14	31	4
27	13	10	46	13	16	11	14	49	7	15	32	24
28	14	10	23	14	16	53	15	50	26	16	33	44
29	15	10	0	15	17	35	16	51	46	17	35	4
30	16	9	36	16	18	17	17	53	9	18	36	20
31	0	0	0	17	19	1	0	0	0	19	37	36



Esto permite obtener los parámetros que describen la órbita con gran extensión angular

2. Datos separados por pocos días dentro de un mismo mes

Frente a la multitud de opciones se llegó a condicionar lo siguiente:

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2.$$

En tal caso, es fácil ver que:

$$a_2 = \frac{a_1^2 - a_3^2}{2[a_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - a_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_2)]}. \quad (\text{Control})$$

Día	marti ⁹ pícez		
	g	m	z
1	20	26	30
2	21	25	59
3	22	25	28
4	23	24	56
5	24	24	21
6	25	23	46
7	26	23	11
8	27	22	26
9	28	21	41
10	29	20	55
11	Yo	20	3
12	1	19	11
13	2	18	19
14	3	17	18
15	4	16	16
16	5	15	14
17	6	14	7
18	7	13	0
19	8	11	53
20	9	10	40
21	10	9	25
22	11	8	10
23	12	6	52
24	13	5	34
25	14	4	16
26	15	2	51
27	16	1	26
28	17	0	1
29	17	58	32
30	18	57	3
31	19	55	34

$\Delta = 7$ d

Día	marti ⁹ pícez		
	g	m	z
1	20	26	30
2	21	25	59
3	22	25	28
4	23	24	56
5	24	24	21
6	25	23	46
7	26	23	11
8	27	22	26
9	28	21	41
10	29	20	55
11	Yo	20	3
12	1	19	11
13	2	18	19
14	3	17	18
15	4	16	16
16	5	15	14
17	6	14	7
18	7	13	0
19	8	11	53
20	9	10	40
21	10	9	25
22	11	8	10
23	12	6	52
24	13	5	34
25	14	4	16
26	15	2	51
27	16	1	26
28	17	0	1
29	17	58	32
30	18	57	3
31	19	55	34

$\Delta = 8$ d

Día	marti ⁹ pícez		
	g	m	z
1	20	26	30
2	21	25	59
3	22	25	28
4	23	24	56
5	24	24	21
6	25	23	46
7	26	23	11
8	27	22	26
9	28	21	41
10	29	20	55
11	Yo	20	3
12	1	19	11
13	2	18	19
14	3	17	18
15	4	16	16
16	5	15	14
17	6	14	7
18	7	13	0
19	8	11	53
20	9	10	40
21	10	9	25
22	11	8	10
23	12	6	52
24	13	5	34
25	14	4	16
26	15	2	51
27	16	1	26
28	17	0	1
29	17	58	32
30	18	57	3
31	19	55	34

$\Delta = 9$ d

Día	marti ⁹ pícez		
	g	m	z
1	20	26	30
2	21	25	59
3	22	25	28
4	23	24	56
5	24	24	21
6	25	23	46
7	26	23	11
8	27	22	26
9	28	21	41
10	29	20	55
11	Yo	20	3
12	1	19	11
13	2	18	19
14	3	17	18
15	4	16	16
16	5	15	14
17	6	14	7
18	7	13	0
19	8	11	53
20	9	10	40
21	10	9	25
22	11	8	10
23	12	6	52
24	13	5	34
25	14	4	16
26	15	2	51
27	16	1	26
28	17	0	1
29	17	58	32
30	18	57	3
31	19	55	34

$\Delta = 15$ d

Día	marti ⁹ pícez		
	g	m	z
1	20	26	30
2	21	25	59
3	22	25	28
4	23	24	56
5	24	24	21
6	25	23	46
7	26	23	11
8	27	22	26
9	28	21	41
10	29	20	55
11	Yo	20	3
12	1	19	11
13	2	18	19
14	3	17	18
15	4	16	16
16	5	15	14
17	6	14	7
18	7	13	0
19	8	11	53
20	9	10	40
21	10	9	25
22	11	8	10
23	12	6	52
24	13	5	34
25	14	4	16
26	15	2	51
27	16	1	26
28	17	0	1
29	17	58	32
30	18	57	3
31	19	55	34

$\Delta = 7$ d

Día	marti ⁹ pícez		
	g	m	z
1	20	26	30
2	21	25	59
3	22	25	28
4	23	24	56
5	24	24	21
6	25	23	46
7	26	23	11
8	27	22	26
9	28	21	41
10	29	20	55
11	Yo	20	3
12	1	19	11
13	2	18	19
14	3	17	18
15	4	16	16
16	5	15	14
17	6	14	7
18	7	13	0
19	8	11	53
20	9	10	40
21	10	9	25
22	11	8	10
23	12	6	52
24	13	5	34
25	14	4	16
26	15	2	51
27	16	1	26
28	17	0	1
29	17	58	32
30	18	57	3
31	19	55	34

$\Delta = 8$ d

En un mes de 31 días se generan 81 temas

Resultados

Valores obtenidos con la primera estrategia (datos separados por tres meses)

Año	t_1	t_2	t_3	$\lambda_1(^{\circ})$	$\lambda_2(^{\circ})$	$\lambda_3(^{\circ})$	e	$\lambda_a(^{\circ})$	$\gamma_0(^{\circ})$
1473	Mar 11	Jun 13	Sep 14	0,334167	90,822500	180,317500	0,037802	90,924262	257,387166
1473	Abr 12	Jul 14	Oct 15	31,576389	120,311111	211,164444	0,037859	90,961430	257,350672
1473	May 11	Ago 13	Nov 14	59,421944	149,097222	241,547778	0,037860	90,806738	257,504549
1473	Jun 12	Sep 14	Dic 13	89,872222	180,317500	271,201944	0,037793†	88,820814†	259,569562†
1474	Mar 10	Jun 13	Sep 14	359,109444	90,583333	180,078333	0,037808	90,674645	257,637076
1474	Abr 14	Jul 17	Oct 16	33,268889	122,937778	211,930556	0,037823	90,772480	257,538928
1474	May 16	Ago 18	Nov 17	63,954444	153,697222	244,370556	0,037877	90,540793	257,772292
1474	Jun 09	Sep 10	Dic 11	86,781667	176,144722	268,912778	0,037724†	82,885080†	265,717894†
1475	Mar 10	Jun 12	Sep 14	358,870556	89,394167	179,840278	0,037801	90,410396	257,901909
1475	Abr 08	Jul 10	Oct 09	27,225000	116,018611	204,660000	0,037879	90,637856	257,669517
1475	May 18	Ago 20	Nov 19	65,621944	155,398611	246,155000	0,037789	90,617183	257,687558
1475	Jun 21	Sep 22	Dic 23	97,947222	187,74000	280,950278	0,037725	90,684318	257,621895
1476	Mar 07	Jun 08	Sep 09	356,655556	86,329722	175,682222	0,037663	90,642106	257,677907
1476	Abr 11	Jul 12	Oct 13	30,904444	118,663611	209,429444	0,038245	90,795119	257,533421
1476	May 15	Ago 17	Nov 17	63,500833	153,232222	244,886944	0,037873	90,877331	257,506041
1476	Jun 13	Sep 12	Dic 13	91,081944	178,615278	271,480278	0,037817	90,950008	257,361248

Tales valores son consistentes con los datos utilizados por los astrónomos del siglo XIII para elaborar las tablas alfonsíes:

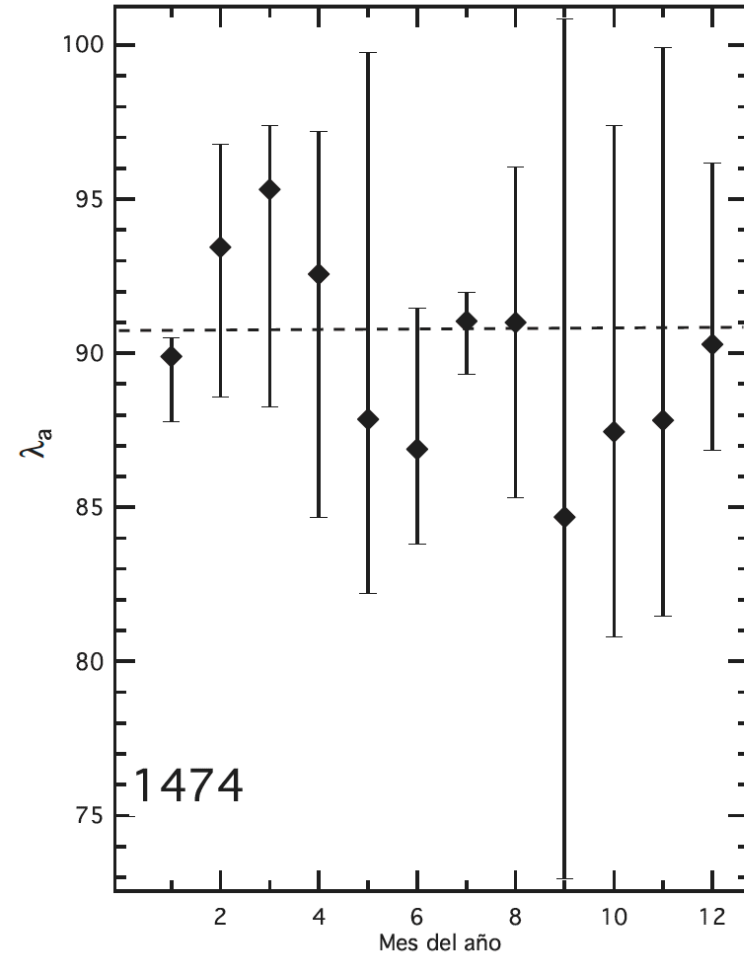
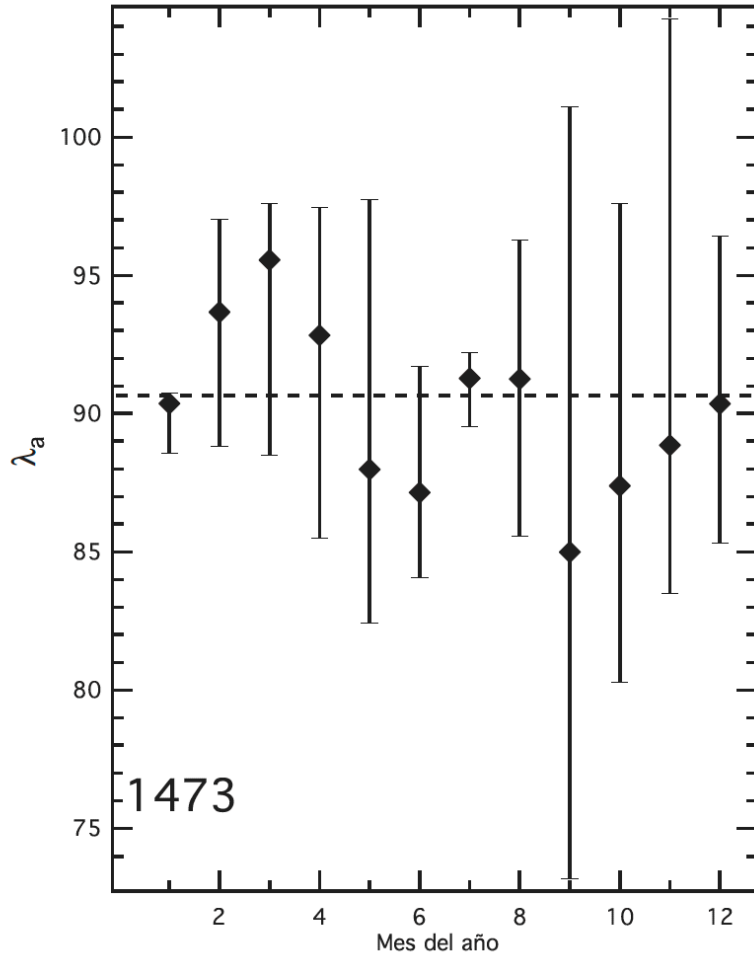
$$e = 0,037840; \lambda_a = 90,89748^{\circ} \text{ y } \gamma_0 = 257,41413^{\circ}$$

Rango de valores de la longitud del apogeo para los años 1473 y 1474

(El intervalo para cada mes señala los valores máximo y mínimo)

(El diamante señala el valor promedio)

(La línea segmentada señala el valor alfonsi)

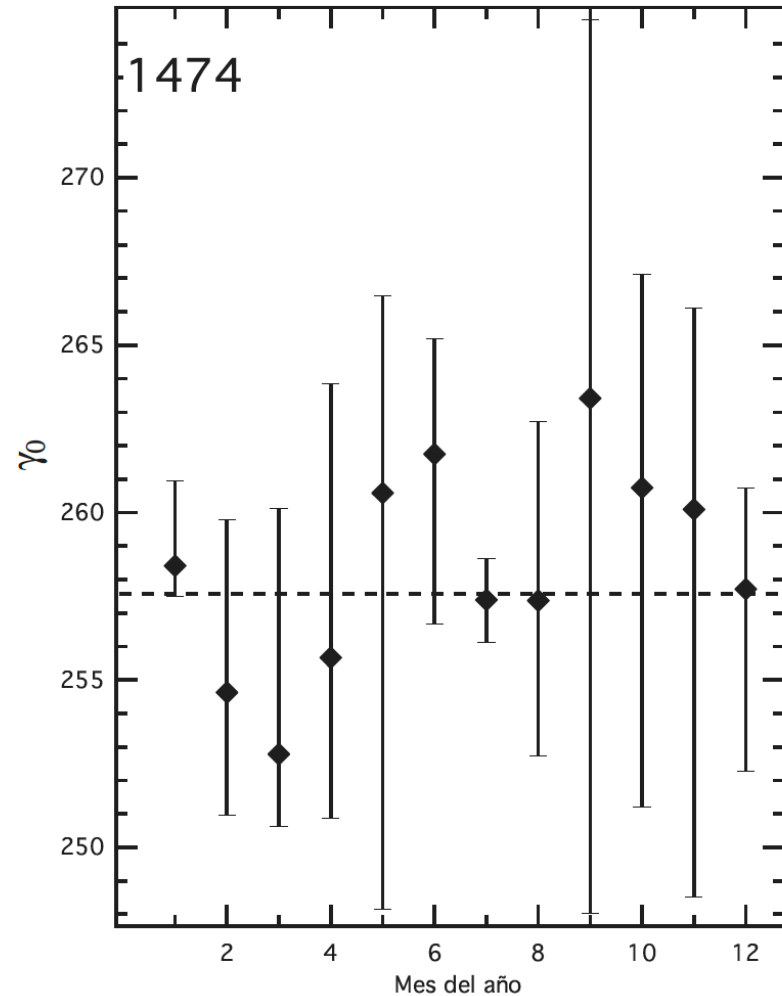
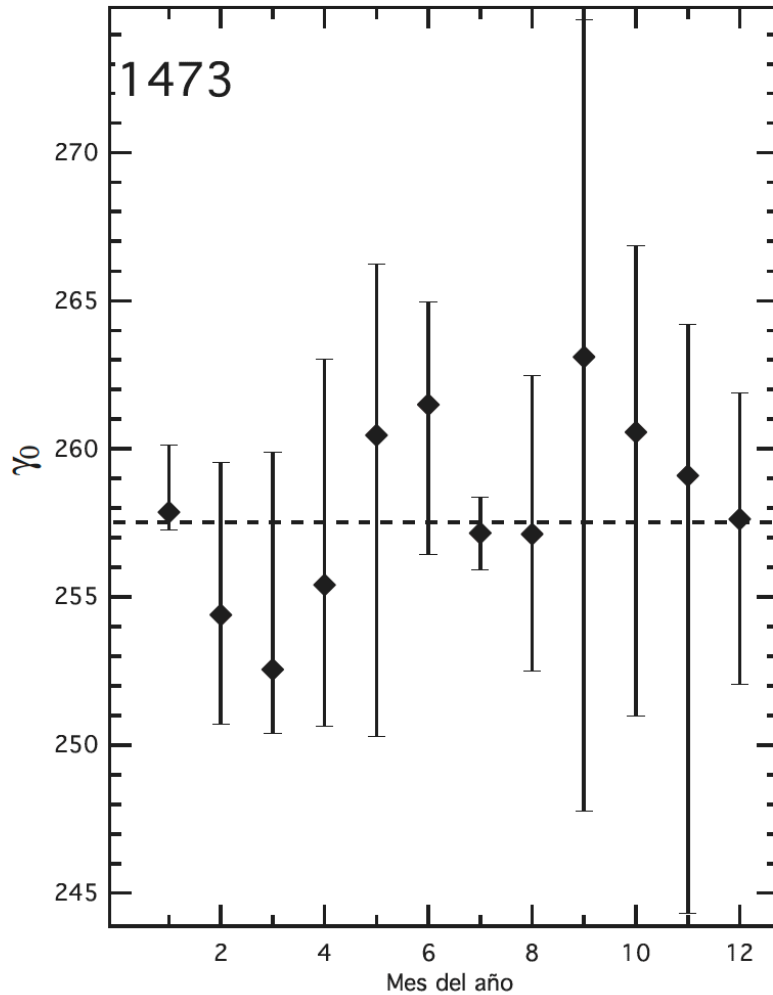


Rango de valores del ángulo γ_0 ($t_0 = 1$ marzo, 1473) para los años 1473 y 1474

(El intervalo para cada mes señala los valores máximo y mínimo)

(El diamante señala el valor promedio)

(La línea segmentada señala el valor alfonsi)

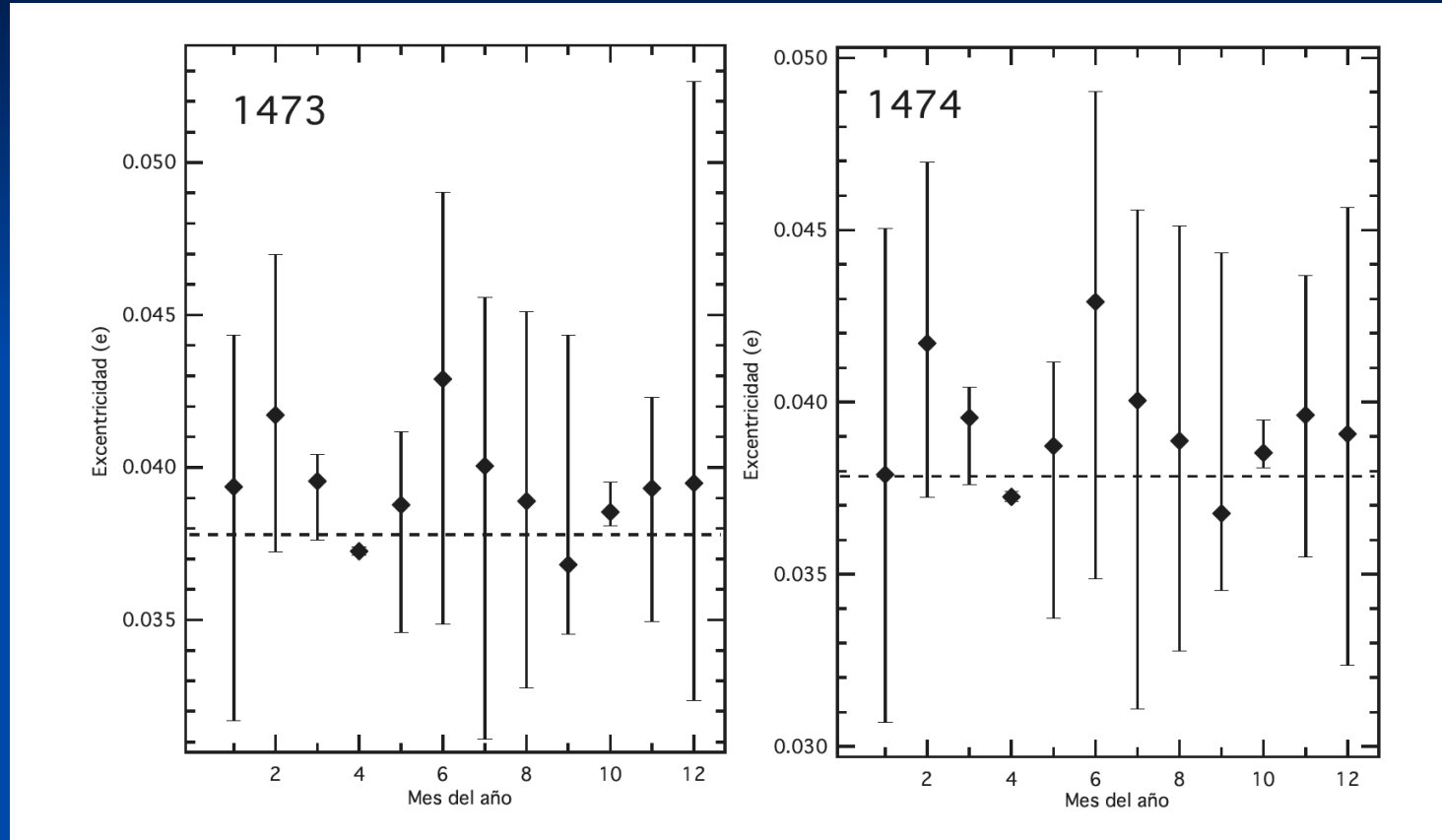


Rango de valores de la excentricidad para los años 1473 y 1474

(El intervalo para cada mes señala los valores máximo y mínimo)

(El diamante señala el valor promedio)

(La línea segmentada señala el valor alfonsi)



Los valores de excentricidad para los meses de junio y diciembre no están dentro un rango que incluya el valor alfonsí y la dispersión es muy baja

Posible explicación: en junio el Sol está en apogeo y en diciembre en perigeo, esto es, donde $\theta \approx \gamma$, y la dispersión es escasa, pero es claro que el calculista utilizó un valor diferente de e en cada caso

En los meses de abril y agosto se utilizaron valores desusadamente altos de e (parecidos al que utilizó Ptolomeo)

Conclusiones

1. Se desarrolló un método computacional que permite determinar los parámetros orbitales de la órbita solar ptolemaica a partir de tres posiciones cualesquiera.
2. Considerados los valores de longitud en gran amplitud, los parámetros de las tablas de Zacuto sugieren una procedencia Alfonsí.
3. Dentro de cada mes, las amplias variaciones en los ángulos λ_a y $\gamma_0(t_0)$ no permiten inferir alguna tendencia en particular sobre estos valores.
4. Dentro de los meses de junio y diciembre los valores de excentricidad resultaron muy uniformes y no están dentro del valor alfonsí, posiblemente debido a su cercanía en la línea de las ápsides.
5. Se obtienen valores desusadamente elevados de excentricidad para los meses de abril y agosto, valores que recuerdan el dato al que llegó Ptolomeo en el siglo (II d. C.)
6. Se logró identificar que el calculista utilizó distintos valores de la excentricidad en meses específicos, lo que sugiere la utilización de tablas de distintas procedencias para la realización de los cálculos.

Gracias!!