Agujero de Gusano en Simetría Hiberbólica

Autor: Daniel Brito, UCV.
Tutor: Ernesto Contreras, USFQ.
Tutor: Ernesto Fuenmayor, UCV.

LA-CoNGA-physics

December 13, 2023

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

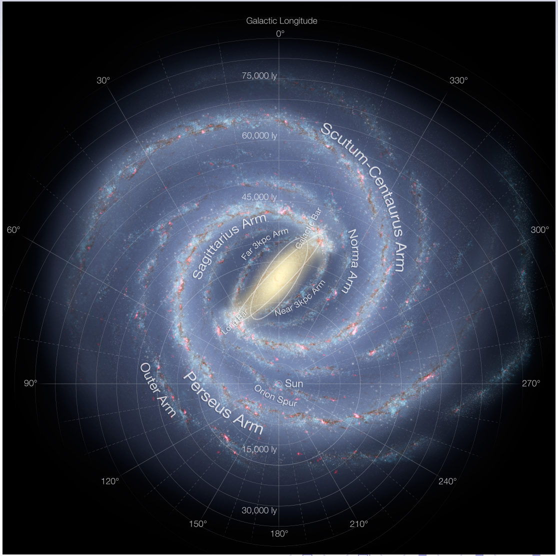
Overview

Motivación.

Interés en viajes interestelares.

- El Universo es muy amplio.
  - Galaxias.
  - Estrellas.
- La mayoría está muy lejos.
- Viajes interestelares a través del cosmos.
  - No contamos con tecnología apropiada.
  - La escalas de tiempo.
- Agujeros de Gusano pueden ser una alternativa.

Mapa de la Vía Láctea



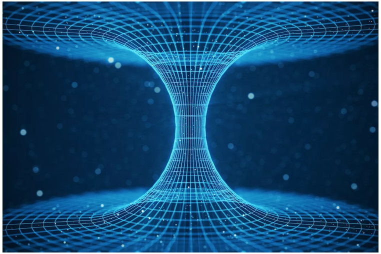
Agujero de gusano

Agujero de gusano Atravesable

Atajo entre dos puntos distantes del espacio tiempo.

Condiciones para agujero de gusano atravesable. [1]

- Es una solución a las ecuaciones del campo.
- La garganta conecta dos regiones asintóticamente planas.
- No debe contener horizontes.
- Las fuerzas gravitacionales soportables para seres vivos.
- El tiempo propio del viajero debe ser finito.



[1] Morris, M. S., & Thorne, K. S. (1988). Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. American Journal of Physics, 56(5), 395-412.

El elemento de línea:

$$ds^2 = -e^{2\alpha}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\beta(r)/r} + r^2 d\theta^2 + (r\sin\theta)^2 d\phi^2$$

$$T^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del campo $8\pi T_{\mu}^{\nu} = G_{\mu}^{\nu}$

$$8\pi\rho = \frac{\beta'}{r^2}$$

$$8\pi P_r = \frac{2\alpha'}{r}\left(1-\frac{\beta}{r}\right) - \frac{\beta}{r^3}$$

$$8\pi P_\perp = \left(1-\frac{\beta}{r}\right)\left(\alpha'' + (\alpha')^2\right) - \frac{\alpha'\left(r\beta' + \beta - 2r\right)}{2r^2} - \frac{(r\beta' - \beta)}{2r^3}$$

Rebanada de espacio

$$\mathbf{ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{\beta}{r}} + d\phi^2 r^2}$$

$+$

Superficie en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{ds^2 = dz^2 + dr^2 + d\phi^2 r^2}$$

$\downarrow$

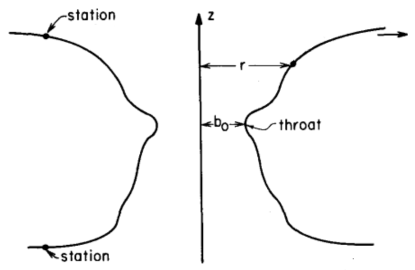
Incrustamiento

$$\mathbf{\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{r}{\beta} - 1}}}$$

Implicaciones del agujero de gusano.

- [2] Incrustando en una superficie con coordenadas cilíndricas

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{r}{\beta} - 1}} \implies \beta(r_0) = r_0$$



- Considerando la "flaring out condition"

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{\beta - r\beta'}{2\beta^2} > 0 \underset{\text{en } r\to r_0}{\implies} \beta'(r_0) < 1$$

- Se define la exoticidad del sistema:

$$\zeta = -\frac{\rho + P_r}{|\rho|} = \frac{2\beta^2}{r|\beta'|}\frac{\beta - r\beta'}{2\beta^2} - \frac{2\alpha'(r-\beta)}{|\beta'|}$$

$$\underset{r\to r_0}{\implies} \zeta(r_0) = \frac{2\beta^2}{r|\beta'|}\frac{d^2r}{dz^2} > 0\ .$$

Se viola la $\nearrow$

Condición de Energía

$$\rho + \mathbf{P_r} > \mathbf{0}$$

[2] Morris, M. S., & Thorne, K. S. (1988). Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. American Journal of Physics, 56(5), 395-412.

Espacio-tiempo con simetría hiperbólica

Fluido autogravitante en simetría hiperbólica.

[3] ▶ Representan una fuente de campo gravitacional.

$$T^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix}$$

Elemento de línea en simetría hipebólica:

$$ds^2 = -e^{\alpha} dt^2 + e^{\beta} dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sinh(\theta))^2 \, d\phi^2$$

Sustituyendo en ecuación de Einstein: $8\pi T_{\mu}^{\ \nu} = G_{\mu}^{\ \nu}$

$$\begin{aligned} 8\pi\rho &= e^{-\beta}\left(\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \\ 8\pi P_r &= e^{-\beta}\left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \\ 8\pi P_\perp &= e^{-\beta}\left(\frac{\alpha''}{2} + \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^2 - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\alpha' - \beta'}{2r}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{m(r) = -\frac{r}{2} R^3_{232} = \frac{r(1 + e^{-\beta})}{2} = -4\pi \int dr \ \rho \, r^2}$$

Manipulando apropiadamente:

$$\begin{aligned} m' &= \frac{1 + e^{-\beta}}{2} - \frac{r}{2}\beta' e^{-\beta} = -8\pi\rho \\ \frac{2}{r^2} m' &= -\left[e^{-\beta}\left(\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}\right] \end{aligned}$$

---

[3] Herrera, L., Di Prisco, A., & Ospino, J. (2021). Hyperbolically symmetric static fluids: A general study. Physical Review D, 103(2), 024037.

Agujero de gusano en simetría hiperbólica

Ecuaciones del campo en simetría hiperbólica.

El elemento de línea:

[4]

$$ds^2 = -e^{2\alpha}dt^2 + \frac{dr^2}{\beta(r)/r - 1} + r^2 d\theta^2 + (r\sinh\theta)^2 d\phi^2 \qquad T^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del campo $8\pi T_{\mu}^{\ \nu} = G_{\mu}^{\ \nu}$

$$\begin{aligned} 8\pi\rho &= -\frac{\beta'}{r^2} \\ 8\pi P_r &= \frac{2\alpha'}{r}\left(\frac{\beta}{r} - 1\right) + \frac{\beta}{r^3} \\ 8\pi P_\perp &= \left(\frac{\beta}{r} - 1\right)\left(\alpha'' + (\alpha')^2\right) + \frac{\alpha'\left(r\beta' + \beta - 2r\right)}{2r^2} + \frac{(r\beta' - \beta)}{2r^3} \end{aligned}$$

Rebanada de espacio

$$\mathbf{ds^2 = \frac{dr^2}{\frac{\beta}{r} - 1} + d\phi^2 r^2}$$

$+$

Superficie en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{ds^2 = dz^2 + dr^2 + d\phi^2 r^2}$$

$\downarrow$

Incrustamiento

$$\mathbf{\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{2r - \beta}{\beta - r}}}$$

---

[4] Lobo, F. S., & Mimoso, J. P. (2010). Possibility of hyperbolic tunneling. Physical Review D, 82(4), 044034.

Análisis del agujero de gusano.

- Incrustando en una superficie con coordenadas cilindrica [5]

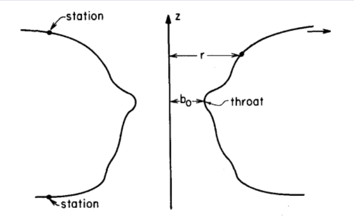
$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{2r-\beta}{\beta-r}} \Longrightarrow \underset{\text{valor mínimo}}{\boxed{\beta(r_0) = r_0}}$$

- Considerando la "flaring out condition"

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{r\beta' - \beta}{2(2r-\beta)^2} > 0 \underset{\text{en } r\to r_0}{\Longrightarrow} \beta'(r_0) > 1$$

- Se define la exoticidad del sistema:

$$\zeta = -\frac{\rho + P_r}{|\rho|} \underset{r\to r_0}{\Longrightarrow} \zeta(r_0) = \frac{(\beta'(r_0) - 1)}{|\beta'(r_0)|} > 0 \, .$$



Condición de Energía

$$\rho + \mathbf{P_r} > \mathbf{0}$$

[5]Lobo, F. S., & Mimoso, J. P. (2010). Possibility of hyperbolic tunneling. Physical Review D, 82(4), 044034.

Agujero de Gusano tipo Casimir.

- Fuerza que actúa en un espacio confinado.
- fluctuaciones de vacio de un campo.

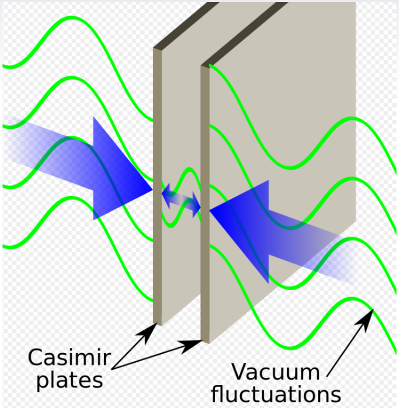
6

$$\Delta E\,\Delta t \leq \frac{\hbar}{2}$$

Ec. de estado barótropa $\rightarrow P_r(r) = \omega\rho(r)$

Energía $\rightarrow \rho(r) = \frac{-k}{8\pi r^4}$, $\quad k = \frac{8\pi\hbar c\pi^2}{720}$

Efecto Casimir



[6] Garattini, R. (2019). Casimir wormholes. The European Physical Journal C, 79(11), 951.

Agujero de gusano tipo Casimir $\rho = -\frac{k}{8\pi r^4}$

El corrimiento al rojo:

$$P_r = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\beta}{r^3} + \frac{2}{r}\alpha'\left(\frac{\beta}{r} - 1\right)\right) = \omega\rho$$

[7] [8]

$$\Longrightarrow \quad \alpha' = \frac{\omega\rho - \frac{\beta}{r^3}}{\frac{2}{r}\left(\frac{\beta}{r} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2(k - r_0^2)}\left((\omega r_0 + k)\log\left|\frac{1}{r} + \frac{r_0}{k}\right| - \left(\omega k + r_0^2\right)\log\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right|\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\omega - 1}{2}\log\left|\frac{r(\omega+1)}{r\omega + r_0}\right| \quad , \quad \omega = \frac{-r_0^2}{k}}$$

La función de forma:

$$\frac{\beta'}{r^2} = 8\pi\rho$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\beta(r) = k\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + r_0}$$

[7] Garattini, R. (2019). Casimir wormholes. The European Physical Journal C, 79(11), 951.

[8] Rueda, A., Avalos, R., & Contreras, E. (2022). Construction of a traversable wormhole from a suitable embedding function. The European Physical Journal C, 82(7), 605.

Factor de complejidad.

- Descomposición ortogonal del Tensor de Riemann.
  $R^{ab}{}_{cd} = C^{ab}{}_{cd} + R^{[a}{}_{[c}\delta^{b]}{}_{d]} + \frac{\mathcal{R}}{3}\left(\delta^{a}{}_{[c}\delta^{b}{}_{d]} - 2\delta^{[a}{}_{[c}\delta^{b]}{}_{d]}\right)$
- $Y_{ac} = R_{abcd}V^bV^d$
- El factor de Complejidad en Simetría hiperbólica. [9] [10]

Fluido homogéneo e isótropo

$$Y_{TF} = 0$$

$$\begin{aligned}
Y_{TF} &= \frac{4\pi}{r^3}\int_{r_0}^{r} d\underline{r}\,\underline{r}^3\underline{\rho}' - 8\pi\Pi \\
&= \left(\frac{\beta}{r} - 1\right)\left(\alpha'' + (\alpha')^2\right) + \frac{\alpha'}{r}\left(\frac{\beta'}{1} + \frac{3\beta}{2r} + 1\right) + \frac{r_0\beta'(r_0) - 3\beta(r_0)}{2r^3} \\
Y_{TF} &= \frac{4\pi}{r^3}\int_{r_0}^{r} d\underline{r}\,\underline{r}^3\underline{\rho}' - 8\pi\Pi \underset{\omega=3}{=} \frac{r_0\left(-2r^2 - 14/3rr_0 - 2/3r_0^2\right)}{r^4\cdot(3r + r_0)}
\end{aligned}$$

[9] Herrera, L., Di Prisco, A., & Ospino, J. (2021). Hyperbolically symmetric static fluids: A general study. Physical Review D, 103(2), 024037.

[10] Rueda, A., Avalos, R., & Contreras, E. (2022). Construction of a traversable wormhole from a suitable embedding function. The European Physical Journal C, 82(7), 605.

Soluciones con complejidad similar.

- Se propone un factor de complejidad generalizado [11]

$$Y_{gTF} = \frac{r_0 \cdot (a_1 r^2 + a_2 r r_0 + a_3 r_0^2)}{r^4 (c_0 r + r_0)} + \frac{1}{2r^3}\left(r_0 \beta'(r_0) - 3\beta(r_0)\right)$$

- Se propone una generalización del corriemiento al rojo:

$$\alpha(r) = \log\left|\frac{c_0 r}{c_0 r + r_0}\right|$$

- Se calculan las funciones de forma equivalentes:

$$Y_{TF} = \left(\frac{\beta}{r} - 1\right)\left(\alpha'' + (\alpha')^2\right) + \frac{\alpha'}{r}\left(\frac{\beta'}{1} + \frac{3\beta}{2r} + 1\right) + \frac{r_0 \beta_0' - 3r_0}{2r^3} = Y_{gTF}$$

$$\Longrightarrow \beta(r) = -\frac{a_0 c_0 r_0}{2} - \frac{a_0 r_0^2}{2r} - \frac{r_0}{c_0} \quad , \text{ donde } \begin{cases} a_2 = 2a_1 c_0 - \frac{7}{2} a_0 c_0^2 \\ a_1 = \frac{3}{2c_0} + \frac{7}{4} a_0 c_0 \end{cases}$$

[11] Rueda, A., Avalos, R., & Contreras, E. (2022). Construction of a traversable wormhole from a suitable embedding function. The European Physical Journal C, 82(7), 605.

Resultados

- Valor mínimo en la garganta:

$$\beta(r_0) = r_0 \implies a_0 = -\frac{2}{c_0}$$

- Flaring out condition:

$$\beta'(r_0) > 1 \implies c_0 < -1$$

- Finalmente la función de forma general:

$$\beta_g(r) = -\frac{a_0 c_0 r_0}{2} - \frac{a_0 r_0^2}{2r} - \frac{r_0}{c_0} \longrightarrow \boxed{\beta_g(r) = r_0 + \frac{r_0}{c_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$$

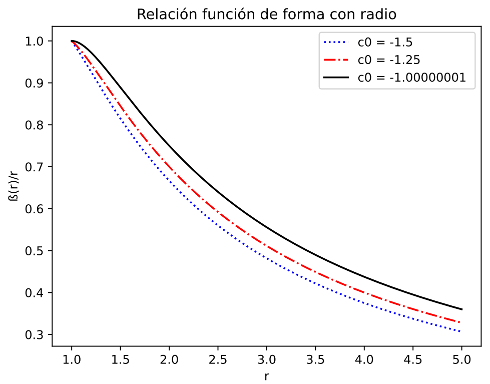
- La aceleración expreimentada por el viajero cumple:

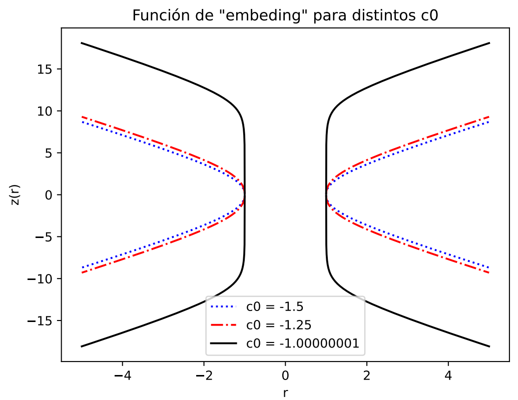
$$a_r = \left| \varepsilon^1 \left(\left(\frac{\beta(r)}{r} - 1 \right) \left(\alpha'' + (\alpha')^2 - \frac{\alpha'}{2r(\beta(r)-r)} (r\beta' - \beta) \right) \right) \right| \leq \frac{g_\oplus}{c^2}$$

$$a_t = \left| \frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{2r^2} \left(v^2 \left(\beta' - \frac{\beta}{r} \right) + 2r\alpha' (\beta - r) \right) \right| \leq \frac{g_\oplus}{c^2}$$

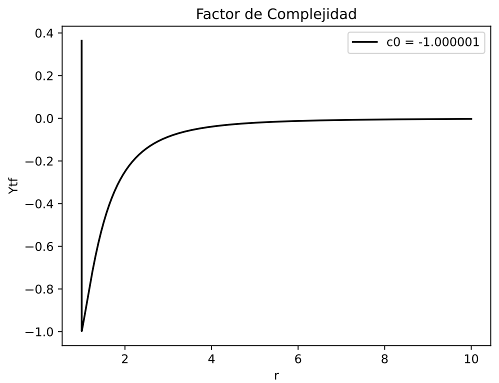
$$\implies \boxed{\alpha'(r_0) \leq \frac{2r_0 g_\oplus}{\varepsilon_1(\beta'(r_0) - 1)}} \quad , \quad \boxed{(\gamma v)^2 \leq \frac{2r_0^2 g_\oplus}{\varepsilon_2(\beta'(r_0) - 1)}}$$

- Relación $\frac{\beta(r)}{r}$
- "Embeding" $\frac{dz}{dr} = \pm\left[\frac{2r-\beta(r)}{\beta(r)-r}\right]^{\frac{1}{2}}$

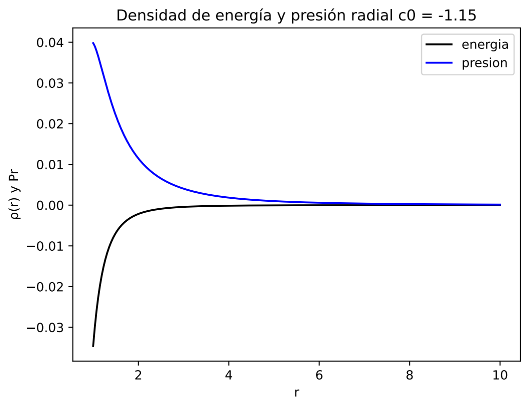




- Factor de complejidad



- Densidad de energía y presión



Conclusiones

Conclusiones

- La materia exótica es indispensable en la garganta del agujero de gusano.
- La solución se caracteriza con un solo parámetro como cosecuencia de la generalizacion del corrimiento al rojo en el agujero de Gusano tipo Casimir.
- Se probó que la densidad de energía siempre es negativa y la presion radial siempre es positiva en la garganta. Esto es contrario al resultado obtenido en simetría esférica donde la densidad de energía es negativa en na pequeña región.
- Como consecuecia de utilizar simetría hiperbólica, la garganta conecta dos regiones que no tienen que ser asintoticamente planas.
- El factor de complejidad tiene su valor máximo valor en la garganta producto de violar la condición de energía débil.

Referencias

References

1. Morris, M. S., & Thorne, K. S. (1988). Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. American Journal of Physics, 56(5), 395-412.
2. Visser, M. (1995). Lorentzian Wormholes. From Einstein to Hawking. Woodbury.
3. Herrera, L., Di Prisco, A., & Ospino, J. (2021). Hyperbolically symmetric static fluids: A general study. Physical Review D, 103(2), 024037.
4. Lobo, F. S., & Mimoso, J. P. (2010). Possibility of hyperbolic tunneling. Physical Review D, 82(4), 044034.
5. Rueda, A., Avalos, R., & Contreras, E. (2022). Construction of a traversable wormhole from a suitable embedding function. The European Physical Journal C, 82(7), 605.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.