

# Avance de tesis

## Condiciones de aceptabilidad física para objetos compactos anisótropos axialmente simétricos en rotación lenta



gado académico y cultural  
de los santandereanos

**Daniel Felipe Suárez Urango<sup>1</sup>**

Director: Luis A. Núñez<sup>1</sup>

Codirector: Justo Ospino<sup>2</sup>

Codirectora: Laura M. Becerra<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Escuela de Física, Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas. Universidad de Salamanca, España.

# Objetivos

#LaUISqueQueremos



Establecer las condiciones de aceptabilidad física para fuentes anisótropas, estacionarias y axialmente simétricas e implementarlas para determinar la estrategia más efectiva de introducir anisotropía en modelos estelares

1. Analizar las estrategias para introducir anisotropía en configuraciones anisótropas, estáticas y esféricamente simétricas, de acuerdo con el número de condiciones de aceptabilidad física cumplidas por los modelos
2. Conformar las condiciones de aceptabilidad física para modelos anisótropos y axialmente simétricos
3. Analizar las estrategias para introducir anisotropía en configuraciones anisótropas axialmente simétricas, en rotación lenta, de acuerdo con el número de condiciones de aceptabilidad física cumplidas por los modelos

# Objetivos específicos

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander



1. Analizar las estrategias para introducir anisotropía en configuraciones anisótropas, estáticas y esféricamente simétricas, de acuerdo con el número de condiciones de aceptabilidad física cumplidas por los modelos

Eur. Phys. J. C (2023) 83:1018  
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12175-6>

THE EUROPEAN  
 PHYSICAL JOURNAL C



Regular Article - Theoretical Physics

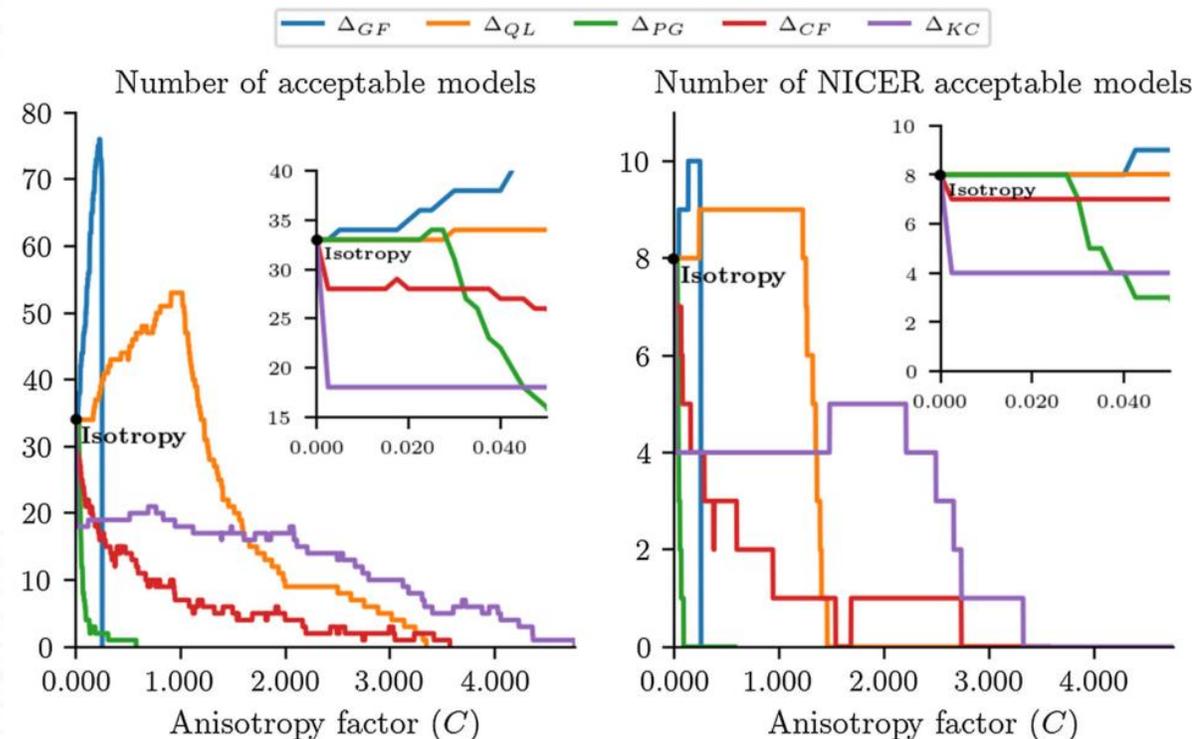
## The physical acceptability conditions and the strategies to obtain anisotropic compact objects

Daniel Suárez-Urango<sup>1,a</sup>, Laura M. Becerra<sup>1,b</sup>, Justo Ospino<sup>2,c</sup>, Luis A. Núñez<sup>1,3,d</sup>

<sup>1</sup> Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga 680002, Colombia

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada and Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas, Universidad de Salamanca, Salamanca, Spain

<sup>3</sup> Departamento de Física, Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela



$$P_{\perp} - P = C_{QL} P \mu = 2C_{QL} P \frac{m}{r} = \Delta_{QL}$$

# Objetivos específicos

#LaUISqueQueremos

Universidad  
Industrial de  
Santander



- Conformar las condiciones de aceptabilidad física para modelos anisótrpos y axialmente simétricos

## Revisiting non Pascalian fluid in General Relativity

J. Ospino\*

*Departamento de Matemática Aplicada and  
Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas,  
Universidad de Salamanca, Salamanca-Spain;*

H. Hernández and L.A. Núñez†

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander,  
Bucaramanga-Colombia and  
Departamento de Física, Universidad de Los Andes,  
Mérida-Venezuela.*

$$e_{\alpha}^{(0)} = V_{\alpha}, \quad e_{\alpha}^{(1)} = K_{\alpha}, \quad e_{\alpha}^{(2)} = L_{\alpha} \quad \text{and} \quad e_{\alpha}^{(3)} = S_{\alpha}$$

$$ds^2 = -A(t, r)^2 dt^2 + B(t, r)^2 dr^2 + R(t, r)^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2]$$

$$V_{\alpha} = (-A, 0, 0, 0), \quad K_{\alpha} = (0, B, 0, 0), \quad L_{\alpha} = (0, 0, R, 0), \quad S_{\alpha} = (0, 0, 0, R \sin(\theta))$$

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + \mathbf{P})V_{\alpha}V_{\beta} + \mathbf{P}g_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} + \mathcal{F}_{\alpha}V_{\beta} + \mathcal{F}_{\beta}V_{\alpha}$$

$$\mathbf{P} = \frac{P + 2P_{\perp}}{3} \quad \Pi_{\alpha\beta} = \Pi \left( K_{\alpha}K_{\beta} - \frac{h_{\alpha\beta}}{3} \right) \quad \Pi = P - P_{\perp}$$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + V_{\mu}V_{\nu} \quad \mathcal{F}_{\mu} = \mathcal{F}K_{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}_{\mu} = (0, \mathcal{F}B, 0, 0)$$

Legado académico y cultural de los santandereanos

# Artículo en construcción: C<sup>3</sup>

#LaUISqueQueremos

Universidad  
Industrial de  
Santander



$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = 2V_{\mu}V_{[\alpha}Y_{\beta]}\nu + 2h_{\alpha[\nu}X_{\mu]}\beta + 2V_{\nu}V_{[\beta}Y_{\alpha]}\mu + h_{\beta\nu}(X_0 h_{\alpha\mu} - X_{\alpha\mu}) + h_{\beta\mu}(X_{\alpha\nu} - X_0 h_{\alpha\nu}) \\ + 2V_{[\nu}Z^{\gamma}_{\mu]}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + 2V_{[\beta}Z^{\gamma}_{\alpha]}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}$$



$$Y_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}Y_0 h_{\alpha\beta} + Y_1 \left( K_{\alpha}K_{\beta} - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta} \right), \quad X_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}X_0 h_{\alpha\beta} + X_1 \left( K_{\alpha}K_{\beta} - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta} \right), \quad Z_{\alpha\beta} = Z (L_{\alpha}S_{\beta} - L_{\beta}S_{\alpha})$$

$$Y_0 = 4\pi(\rho + 3\mathbf{P}), \quad Y_1 = \mathcal{E} - 4\pi\Pi, \quad X_0 = 8\pi\rho, \quad X_1 = -(\mathcal{E} + 4\pi\Pi) \quad \text{and} \quad Z = 4\pi\mathcal{F}$$



$$\mathcal{E} = \frac{4\pi}{r^3} \left( \int_0^r d\tilde{r} \tilde{r}^3 \rho' - r^3 \Pi \right)$$

$$\mathbf{P}_{,\beta} h_{\lambda}^{\beta} = -(\rho + \mathbf{P}) a_{\lambda} - \Pi_{\beta;\alpha}^{\alpha} h_{\lambda}^{\beta} \Rightarrow P_{,\lambda} = -(\rho + \tilde{\rho} + P) a_{\lambda}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{2J_1}{a_1} \Pi$$

# Calcular



## 1. Anisotropía proporcional a la fuerza gravitacional

$$P_{\perp} - P = \frac{C(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r - 2m} \equiv \Delta_{GF} \longrightarrow \Pi_{GF} = -\frac{C_{GF}(\rho + P)rA'}{A} \Rightarrow \tilde{\rho} = -2C_{GF}(\rho + P)$$

M. Cosenza et al., J. Math. Phys., 1981

## 2. Ecuación de estado cuasilocal

$$P_{\perp} - P = 2CPm/r \equiv \Delta_{QL} \longrightarrow \Pi_{QL} = -\frac{2C_{QL}Pm}{r} \Rightarrow \tilde{\rho} = -\frac{4C_{QL}APm}{r^2A'}$$

D. Doneva, et al., Phys. Rev. D, 2012

## 3. Anisotropía proporcional al gradiente de presión

$$P_{\perp} - P = -Cf(\rho)k^{\mu}\nabla_{\mu}P \equiv \Delta_{PG} \longrightarrow \Pi_{PG} = C_{PG}f(\rho)BK^{\mu}P_{;\mu} \Rightarrow \tilde{\rho} = \frac{2C_{PGA}f(\rho)BP^{\dagger}}{rA'}$$

G. Raposo, et al., Phys. Rev. D, 2019

# Calcular



## 4. Factor de complejidad

$$P_{\perp} - P = -\frac{C}{2r^3} \int_0^r \tilde{r}^3 \rho' d\tilde{r} \equiv \Delta_{CF} \quad \longrightarrow \quad \Pi_{CF} = -\frac{C_{CF} X_1}{8\pi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho} = -\frac{C_{CF} A X_1}{4\pi r A'}$$

L. Herrera, Phys. Rev. D, 2018

## 5. Condición de Karmarkar

$$P_{\perp} - P = \frac{C}{r^3} \int_0^r \tilde{r}^3 \rho' d\tilde{r} \left[ \frac{(3P - \rho) - \frac{1}{r^3} \int_0^r \tilde{r}^3 \rho' d\tilde{r}}{4\rho} \right] \equiv \Delta_{KC}$$

K.R. Karmarkar, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.-Section A, 1948

$$\longrightarrow \quad \Pi_{KC} = -\frac{C_{KC} X_1 [4\pi (\rho + 3P) - X_0 - X_1]}{8\pi X_0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho} = -\frac{C_{KC} A X_1 [4\pi (\rho + 3P) - X_0 - X_1]}{4\pi r A' X_0}$$

# Comprobar y corregir



Comprobar alrededor de 70 ecuaciones... y corregirlas si es necesario

$$X_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha}^{\mu\nu} \left( \epsilon_{\beta}^{\delta} J_{\delta\mu;\nu}^{(k)} - K_{\beta} S^{\delta} J_{\delta\mu;\nu}^{(l)} \right)$$

$$h_{\lambda}^{\beta} Y_{\beta;\alpha}^{\alpha} = (X_0 + Y_0) a_{\lambda} + h_{\lambda}^{\beta} Y_{0,\beta} - a^{\alpha} X_{\alpha\lambda}$$

$$h_{\lambda}^{\beta} X_{\beta;\alpha}^{\alpha} = a^{\alpha} X_{\alpha\lambda}.$$

1. the TOV-equation

$$\mathbf{P}_{,\beta} h_{\lambda}^{\beta} = -(\rho + \mathbf{P}) a_{\lambda} - \Pi_{\beta;\alpha}^{\alpha} h_{\lambda}^{\beta}$$

2. the Weyl-TOV equation

$$h_{\lambda}^{\beta} E_{\beta;\alpha}^{\alpha} = 4\pi(\rho + \mathbf{P}) a_{\lambda} + \frac{4\pi}{3} (2\rho + 3\mathbf{P})_{,\beta} h_{\lambda}^{\beta} + (E_{\alpha\lambda} + 4\pi\Pi_{\alpha\lambda}) a^{\alpha}.$$

Solución:



xAct

# Peeero...

## 4.1 Vanishing complexity factor condition

Vanishing complexity factor condition, proposed by Luis Herrera, gives the relation  $E_{\alpha\beta} = 4\pi\Pi_{\alpha\beta}$ . From equations (43) and (44) we find that

$$\rho_{,\beta}h_{\lambda}^{\beta} + 3\Pi_{\alpha\lambda}a^{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi = -\frac{\rho^{\dagger}}{2a_1}. \quad (59)$$

This equation shows how the energy density gradient is related to the anisotropy and therefore to the stability of the system.

$$\Pi_{CF} = -\frac{C_{CF} X_1}{8\pi} \quad X_1 = -(\mathcal{E} + 4\pi\Pi) \quad \mathcal{E} = \frac{4\pi}{r^3} \left( \int_0^r d\tilde{r} \tilde{r}^3 \rho' - r^3 \Pi \right)$$

$$a_1 = \frac{1}{B} \frac{A'}{A}$$

## A corto plazo:

#LaUISqueQueremos



Finalizar el artículo en construcción y enviarlo

Presentar los resultados en Latin American Conference on Astrophysics and Relativity (LACAR). Bogotá, junio 24-27

## A corto/mediano plazo:

2. Conformar las condiciones de aceptabilidad física para modelos anisótropos y axialmente simétricos

Configuraciones anisótropas axialmente simétricas en rotación lenta con el formalismo de tétradas y escalares de estructura

Actividad	Meses									
	1-2	2-5	5-8	8-10	10-12	12-14	14-20	18-22	20-24	24-26
Revisión bibliográfica	X	X	X	X	X					
Planteamiento de las ecuaciones de estructura para modelos estáticos con simetría esférica (MESE)	X									
Integración numérica de MESE para cada una de las estrategias para introducir anisotropía		X								
Evaluación de las condiciones de aceptabilidad física de MESE y visualización de resultados			X							
Revisión bibliográfica e investigación de antecedentes sobre condiciones de aceptabilidad para modelos estacionarios con simetría axial (MESA)				X	X					
Extensión de las condiciones de aceptabilidad física para MESE a MESA					X					
Formación de las condiciones de aceptabilidad física para MESA				X	X	X				
Planteamiento de las ecuaciones de estructura para MESA					X	X				
Integración numérica de MESA para cada una de las estrategias para introducir anisotropía							X			
Evaluación de las condiciones de aceptabilidad física de MESA y visualización de resultados								X		
Análisis y comparación de resultados. Conclusiones									X	
Escritura y entrega de la tesis									X	X

Queremos



adémico y cultural de los santandereanos



Legado académico y cultural  
de los santandereanos

*¡Gracias!*

#LaUISqueQueremos

# Modelado de objetos compactos



$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu}^{\nu}R = -8\pi T_{\mu}^{\nu}$$

$$c = G = 1$$

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2] \quad T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}[\rho(r), -P(r), -P_{\perp}(r), -P_{\perp}(r)]$$

Ecuaciones de estructura

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} + \frac{2(P_{\perp} - P)}{r} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \end{cases}$$

Incógnitas:  $P, P_{\perp}, \rho, m$

Fuerza debido a la anisotropía  $\Delta = P_{\perp} - P$

# Resultados

D. Suárez-Urango et al., Eur. Phys. J. C., 2023

#LaUISqueQueremos

Universidad  
Industrial de  
Santander



$$\rho(r) = \rho_c (1 - \alpha r^2)$$

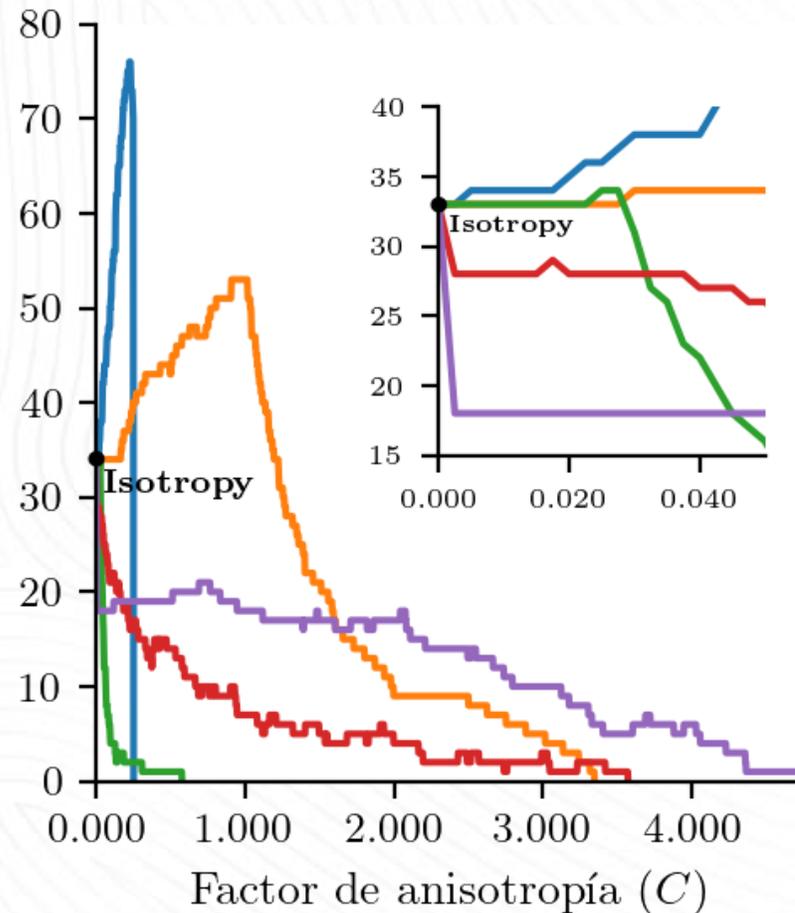
C: factor de  
anisotropía

La anisotropía  
aumenta el número  
de modelos  
aceptables



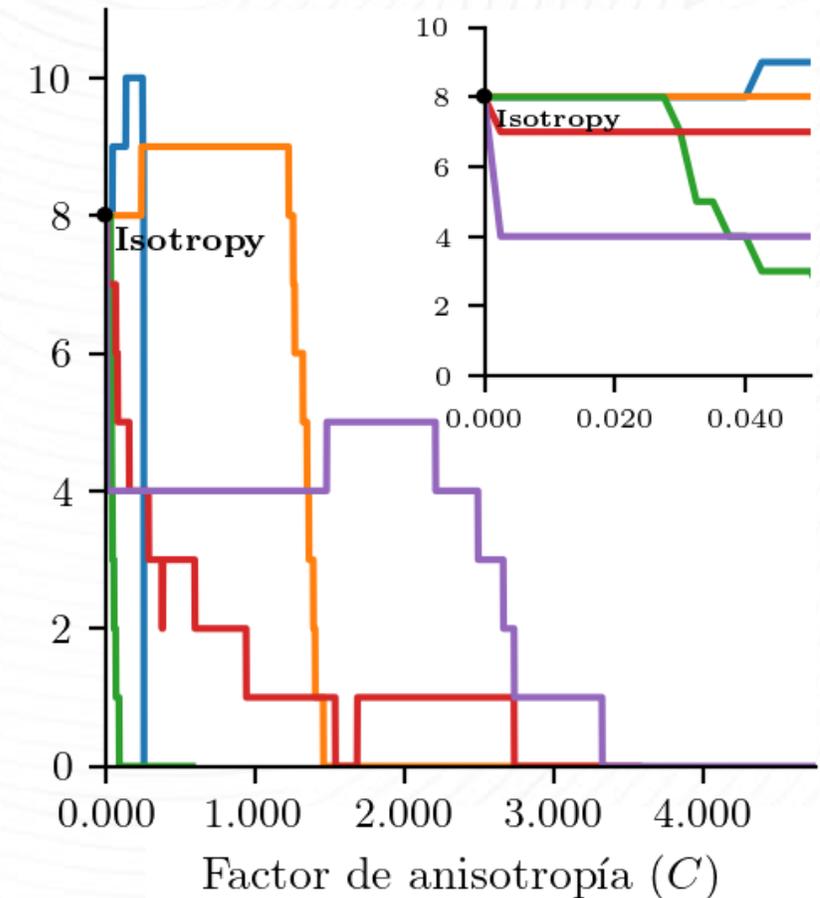
—  $\Delta_{GF}$  —  $\Delta_{QL}$  —  $\Delta_{PG}$  —  $\Delta_{CF}$  —  $\Delta_{KC}$

Número de modelos aceptables



Número de modelos aceptables para NICER

M.C. Miller et al., Astrophys. J. Lett., 2021



PSR J0740+6620

# Anisotropía y flujo disipativo



$$\left(\mathbf{P} - \frac{\kappa}{\tau}T\right)_{,\beta} h_{\alpha}^{\beta} = - \left(\rho + \mathbf{P} - \frac{\kappa}{\tau}T\right) a_{\alpha} - \Pi_{\beta;\mu}^{\mu} h_{\alpha}^{\beta} - (\sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta}) \mathcal{F}^{\beta} \\ + \left\{ \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{\eta\tau}{\kappa T^2} \right) \right]^{\bullet} - \frac{5}{6} \Theta \right\} \mathcal{F}_{\alpha},$$



$$\bar{P}_{,\beta} h_{\alpha}^{\beta} = - (\bar{\rho} + \bar{P}) a_{\alpha} + \bar{\sigma} q_{\alpha}$$



$$\bar{P}_{,\beta} h_{\alpha}^{\beta} = - \left( \bar{\rho} - \frac{\bar{\sigma} \mathcal{F}}{a_1} + \bar{P} \right) a_{\alpha}$$

$$\bar{P} = P - \frac{\kappa}{\tau}T \quad \text{and}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} - \frac{\dot{T}}{AT} - \frac{2}{3}\sigma - \frac{5}{6}\Theta.$$

$$a_{\alpha} = a_1 K_{\alpha} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_{\alpha} = \mathcal{F} K_{\alpha}$$