Muografía: Aplicaciones en la Geofísica

Rafael Armando Martínez Rivero

Universidad Industrial de Santander Director: C. Sarmiento-Cano Co-directores: L. Nuñez, J. D. Sanabria

> Bucaramanga, Colombia Mayo 2025



R. A. Martínez (UIS)

Muografía: Aplicaciones

Mayo 2025

Muografía

- 2 Aplicaciones Contemporáneas
- Inversión Conjunta
- 4 Casos de Estudio
- 5 Conclusiones y Perspectivas

- (日)



Figura: Espectro de rayos cósmicos (CRs). [Navas

et al.(2024)]

Características del Espectro:

• Flujo diferencial:

$$\frac{dN}{dA\,dT\,d\Omega\,dE} \,\propto\, E^{\eta}$$

con índice espectral negativo η .

- Energías < GeV: Modulación por el campo magnético solar.
- Rodilla (~ 10¹⁵ eV): Límite de aceleración galáctica.
- Energías > 10¹⁹ eV: Límite GZK y orígenes extragalácticos.

Cascadas atmosféricas

Las EAS son partículas secundarias producidas por una primario interactuiando con átomos en la atmósfera terrestre.



Figura: Comparación entre las cascadas producidas por un Fe y un fotón de 10¹⁵ eV. Visualizaciones tomadas de F. Schmidt and J. Knapp (2005).

R. A. Martínez (UIS)

Muones atmosféricos

Partícula	Canales de desintegración	BR [%]	Vida
	parcial		media [s]
π^{\pm}	$\mu^{\pm} + (\nu_{\mu})$	99.99	$2,603 \cdot 10^{-8}$
K^{\pm}	$\mu^{\pm} + (\nu_{\mu})$	63.43	$1,238 \cdot 10^{-8}$
	$\pi^0 + \mu^{\pm} + (\nu_{\mu})$	3.27	
τ^{\pm}	$\mu^{\pm} + (\nu_{\mu}) + (\bar{\nu}_{\tau})$	17.36	$2,906 \cdot 10^{-13}$
D^{\pm}	$K^0 + \mu^{\pm} + (\nu_{\mu})$	7.0	$1,040 \cdot 10^{-12}$
D^0	μ^{\pm} + Hadrones	6.5	$4,103 \cdot 10^{-13}$
	$K^{-} + \mu^{+} + \nu_{\mu}$	3.19	





La mayoría de los muones provienen del decaimiento de mesones, principalmente piones (π^{\pm}) y kaones (K^{\pm}) , producidos cuando los rayos cósmicos primarios interactúan con los núcleos de la atmósfera terrestre.

Mayo 2025

Muones e Interacción con la Materia

Parametrización de la Pérdida de Energía

$$\left\langle -\frac{dE}{dx}\right\rangle = a(E) + b(E)E$$



Figura: Poder de frenado de los muones en cobre. [Particle Data Group(2022)]

 Partícula elemental con espín ¹/₂ y masa en reposo (105,7 MeV).

Mecanismos de Pérdida de Energía

- Ionización (Ec. de Bethe-Bloch).
- Radiación de frenado $(bremsstrahlung) \sim (m_e/m_\mu)^2.$
- Producción de pares electrónicos e^+e^- . $\sim (m_e/m_\mu)^2$
- Colisiones inelásticas con núcleos.

R. A. Martínez (UIS)

Mayo 2025

6/37

Muografía



Publicaciones sobre Muografia

• Formación de imágenes usando muones cósmicos.

Estudios iniciales:

- Mediciones en túneles [Neddermeyer SH(1937)].
- Exploración de cámaras ocultas en pirámides [Alvarez et al.(1970)].
- Imagen por dispersión de muones [Borozdin (2003)].
- Proyecto ScanPyramids 2015-2017

Principio de atenuación

Principio: un haz de muones con flujo inicial I_0 se atenúa al atravesar un medio de opacidad

$$arrho = \int_L
ho(\chi) \, d\chi,$$

y la transmitancia es

$$T(\varrho) = \frac{I(\varrho)}{I_0}$$

 $\begin{array}{ll} I_0 & \mbox{Flujo inicial de muones} \\ I(\varrho) & \mbox{Flujo transmitido} \\ \rho(\chi) & \mbox{Densidad local (g/cm³)} \\ \frac{dE}{dx} & \mbox{Poder de frenado (MeV·cm²/g)} \end{array}$

$$E_{\rm mín} = E_{\mu} + \int_0^{\varrho} \frac{dE}{dx} \, d\varrho$$

Metodología

- **1** Medir, estimar o simular I_0
- 2 Medir intensidad I(ρ).
- **3** Calcular $\rho = \int_L \rho(\chi) \, d\chi$.
- Inferir densidad: invertir $T(\varrho) \rightarrow \rho(\chi).$

Configuración experimental: Un hodoscopio de muones registra la cantidad de partículas y su ángulo de incidencia.



- Particulas detectadas: $N(\varrho) = \Delta t \times T \times I(\varrho).$
- La aceptancia combina la eficiencia geométrica y angular del arreglo, definida como el producto del área efectiva de detección R y la resolución angular $\delta\Omega$, para trayectorias equivalentes:

$$T(r_{ij}) = R(r_{ij}) \times \delta \Omega(r_{ij}).$$

Gravimetría principios

El campo gravitatorio en un punto $\vec{r_0}$ debido a una distribución de densidad $\rho(\vec{r})$ se modela como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_0) = G \int_V \rho(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|^3} \, dV,$$

r₀: punto de medición ρ (**r**): densidad local (kg/m³) **g**: vector gravedad (m/s²) *V*: volumen de integración

Flujo de trabajo

- Medir g_{obs} (anomalías de Bouguer tras correcciones).
- 2 Modelar $\rho(\mathbf{r})$ para explicar \mathbf{g}_{obs} .
- Invertir el modelo.







Mayo 2025

Gravimetría inversión

Modelo linealizado (discretización)

$$g_i = \sum_{j=1}^k G_{ij} \,
ho_j \iff \mathbf{g} = \mathbb{G} \, \boldsymbol{
ho}$$

Dimensiones

 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^k, \ \mathbb{G} \in \mathbb{R}^{n \times k}$

No unicidad: $n \ll k$ infinitas soluciones posibles.

Regularización Para estabilizar la inversión se minimiza:

 $\min_{\boldsymbol{\rho}} \|\mathbb{G}\,\boldsymbol{\rho} - \mathbf{g}\|^2 \ + \ \lambda \, \|\mathbf{L}\,\boldsymbol{\rho}\|^2$

- L: operador de suavidad (penaliza discontinuidades).
- λ: parámetro de regularización.

Solución típica: $\boldsymbol{\rho} = (\mathbb{G}^T \mathbb{G} + \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbb{G}^T \mathbf{g}$

Aplicación combinada

- Muografía para profundidad (gran opacidad).
- Gravimetría para contornos y dinámicas locales.

R. A. Martínez (UIS)

Sísmica (I)

Mide la propagación de ondas elásticas generadas por fuentes naturales o inducidas.

Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = V^2 \nabla^2 u(\mathbf{r},t)$$

donde $V \in \{V_p, V_s\}$.

Velocidades según módulos elásticos

•
$$V_{\rho} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}G}{\rho}}$$

• $V_{s} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

Nota: la inversión sísmica entrega $f(K, G)/\rho$, no ρ aislada.





< □ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 >

Sísmica Técnica

Pasos de inversión

- Registrar señales reflejadas y transmitidas.
- 2 Calibrar modelo de capas usando.
- Ajustar parámetros elásticos y densidad con regularización.



Integración multi-método

Combinar sísmica con gravimetría y muografía para:

- Mejor resolución vertical (sísmica) vs. lateral (gravimetría).
- Validar densidades y contrastes detectados.
- Monitoreo dinámico de cambios físicos.

Resistividad Eléctrica

Inyección de corriente continua y medida de potencial eléctrico. Sensible a porosidad, saturación y conductividad de fluidos.

Ley de Archie

$$\rho_r = \rho_w \, a \, \Phi^{-n}$$

• ρ_w resistividad del agua, Φ porosidad y *a*, *m* parámetros empíricos



R. A. Martínez (UIS)

Muografía: Aplicaciones

14 / 37

Resistividad Eléctrica

Inversión y regularización

- Sistema lineal mal condicionado: muchas distribuciones de ρ_r describen en los datos.
- Se aplican regularización, priors geológicos o Bayesianas.
- Solución típica: $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{g}$.

Aplicaciones volcánicas

- Girard (2008): mapeo de acuíferos costeros.
- Minami (2018): monitoreo temporal en Aso, Japon.

Complementariedad

Gravimetría + muografía + resistividad:

• Heterogeneidad eléctrica (fracturas, fluidos).

R. A. Martínez (UIS)

Muografía: Aplicaciones

Mayo 2025

15 / 37

Vulcanología (I)

Puy de Dôme (Francia): Ambrosino et al. (2015) instalaron dos detectores (MU-RAY y TOMUVOL) en la base del volcán (espesores \sim 1000 m).



Vulcanología (II)



 $\Phi_{\text{MU-RAY}} = 1,83 \pm 0,50 \text{ (sist)} \pm 0,07 \text{ (estat)} \text{ } \text{m}^{-2} \, \text{dia}^{-1} \, \text{deg}^{-2}$

 $\Phi_{\text{TOMUVOL}} = 1.95 \pm 0.16 \text{ (sist)} \pm 0.05 \text{ (estat)} \text{ } \text{m}^{-2} \, \text{dia}^{-1} \, \text{deg}^{-2}$

Densidad Int	Elevación	Flujo Trans	Densidad Int	Sesgo
(Real, mwe)	Áng (°)	$(m^{-2} d^{-1} deg^{-2})$	(Medida, mwe)	(%)
500	18	3.18	389.7	-22
1000	11	0.83	539.6	-46
2000	3	0.19	498.3	-75

Cuadro: Flujo transmitido de muones atmosféricos balísticos detrás de diferentes espesores de roca y la densidad invertida a través de una medición muográfica afectada por un flujo de fondo de $1.94 \text{ m}^{-2} \text{ d}^{-1} \text{ deg}^{-2}$.

Discriminación de fondo: Este trabajo y el de Nishiyama et al. (2014) confirmaron que partículas dispersas y muones de baja energia pueden enmascarar la señal principal. Recomiendan placas de plomo u otros métodos para suprimir esos eventos.

Conclusión: La muografía es muy prometedora, pero en volcanes con espesores > 500 m se deben implementar técnicas eficientes de supresión de fondo para obtener imágenes confiables de densidad.

Estructuras geo-antrópicas (I)

Mina Temperino (Italia): Beni et al.(2023) usaron el detector MIMA en galerías subterráneas. Se observó un cuerpo subvertical de alta densidad (3.0–3.4 g/cm³), coincidente con diques máficos y mineralización de sulfuros (Cu–Fe–Zn–Pb). Contrastaron datos muográficos con levantamientos láser (TLS) y resultó coherente con la geología local.





19/37

Asama-Iwodake: Integración muografía-gravimetría

Caso Asama (Japón) [Okubo and Tanaka(2012)]

- Muografía: arreglo a 2–4km del cráter.
- Gravimetría: gravímetro absoluto FG5 registrando cada 10–15s.
- Objetivo: seguir dinámicamente el ascenso de la cabeza de magma previo a la erupción.



Estrategia

- Muografía diaria para cuantificar densidades someras y detectar cambios rápidos.
- Eliminación de la contribución somera en cada serie gravimétrica (sub-minutal).
- 3 Conversión de variaciones $\Delta g(t)$ en altura de magma H(t) mediante modelo lineal de masa.

R. A. Martínez (UIS)

lwodake: Resultados muográficos y gravimétricos

Densidad somera y conducto de magma



R. A. Martínez (UIS)

Mayo 2025 ____

21/37

Asama: Monitoreo temporal dinámico

Los cambios de gravedad $\Delta g(t)$ se modelan con:

$$\Delta g(H) = \pi G \rho a^2 \phi \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (H - H_0)^2}} - \frac{1}{L} \right) + \Delta g_0.$$

Definición de variables

 Δg : variación de gravedad (μ gal) *G*: constante gravitacional (6.67×10⁻¹¹m³kg⁻¹s⁻²) ρ : densidad del magma (gcm⁻³) *a*: radio de conducto (m) ϕ : porosidad efectiva *L*: distancia al gravímetro (m) *H*, *H*₀: altura de magma y cota del gravímetro (m) Δg : corrección de línea bace Por medio del ajuste:

- Ascenso de magma de decenas de metros horas antes de la erupción.
- Correlación precisa entre H(t) y eventos explosivos.
- Resolución temporal sub-diaria; detección de variaciones de 5–10 μ gal.



Figura: Cambio de densidad aparente pre y post erupción 2009 en Asama.

Figura: Variación de gravedad (Δg) en Asama durante sept. 2004.

Sept. 2004 21

14

Strombolian eruptions:

ava mound formation

Vulcanian eruptions

28

Un problema se considera bien planteado en los espacios métricos (F, U) si satisface las siguientes condiciones:

- **1** Existencia: Para todo $u \in U$, existe una solución $z \in F$.
- **Onicidad:** La solución z es única.
- Stabilidad: Si dos datos iniciales u₁, u₂ ∈ U son cercanos en la métrica ρ_U, entonces sus respectivas soluciones z₁ = R(u₁) y z₂ = R(u₂) también lo son en la métrica ρ_F. Específicamente, se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } \rho_U(u_1, u_2) \le \delta(\epsilon) \Rightarrow \rho_F(z_1, z_2) \le \epsilon. \quad (1)$$

Si alguna de estas condiciones no se satisface, el problema se considera incorrectamente planteado.

Para datos gravimétricos y muográficos, se tienen ecuaciones lineales respecto a la densidad ρ :

$$\begin{pmatrix} \mathsf{g}_{\mathsf{obs}} \\ \bar{\rho}_{\mathsf{obs}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{G} \\ \mathbb{M} \end{pmatrix} \ \rho + \epsilon.$$

Las matrices \mathbb{G} y \mathbb{M} representan la sensibilidad gravimétrica y muográfica, respectivamente. Siguiendo a Tarantola [Tarantola(2005)], se asigna una distribución de probabilidad a los datos y otra a la solución a priori. La probabilidad a posteriori viene dada por el producto:

$$p(\rho \mid d) \propto p(d \mid \rho) p(\rho).$$

Suponiendo errores gaussianos en datos y modelo, la función objetivo a minimizar es:

$$\phi(\rho) = \| d - \mathbb{A}\rho \|_{\mathcal{C}_{D}^{-1}}^{2} + \| \rho - \rho_{\mathsf{prior}} \|_{\mathcal{C}_{P}^{-1}}^{2},$$

donde C_D y C_P son matrices de covarianza de datos y de la *a priori*.

La solución óptima viene dada por:

$$\rho_{\mathsf{est}} = \rho_{\mathsf{prior}} + C_{P} \mathbb{A}^{T} \left(\mathbb{A} C_{P} \mathbb{A}^{T} + C_{D} \right)^{-1} \left(d - \mathbb{A} \rho_{\mathsf{prior}} \right),$$

y la incertidumbre por:

$$C_{\text{est}} = C_P - C_P \mathbb{A}^T (\mathbb{A} C_P \mathbb{A}^T + C_D)^{-1} \mathbb{A} C_P.$$

Ejemplos: [Barnoud et al.(2019)Barnoud, Cayol, Niess, Cârloganu, Lelièvre, Labazuy, and Le Ménédeu], [Rosas-Carbajal et al.(2017)Rosas-Carbajal, Jourde, Marteau, Deroussi, Komorowski, and Gibert]. Ajustan además un desplazamiento constante *c* para alinear densidades muográficas con gravimétricas. Algunos métodos prescinden del marco estrictamente bayesiano y proponen la minimización de la función compuesta:

$$\Phi = \lambda_1 \Phi_{d1}(\rho) + \lambda_2 \Phi_{d2}(\rho) + \Phi_m(\rho),$$

donde Φ_{d1} y Φ_{d2} miden la discrepancia con datos gravimétricos y muográficos, y Φ_m es un término de regularización (e.g. suavidad).

La **corrección de desplazamiento** c entre ambos conjuntos de datos también puede introducirse como un parámetro adicional en la minimización [Lelièvre et al.(2019)Lelièvre, Barnoud, Niess, Cârloganu, Cayol, and Farquharson].

La Soufrière de Guadeloupe



Rosas-Carbajal et al. (2017) realizaron inversión conjunta 3D en el domo de lava, combinando 650 mediciones gravimétricas y muografías desde tres telescopios. Identificaron zonas de **baja densidad** correlacionadas con actividad hidrotermal y debilidad mecánica.

R. A. Martínez (UIS)

Muografía: Aplicaciones

Mayo 2025

La Soufrière de Guadeloupe (Resultados)



La inversión conjunta redujo sesgos y artefactos, superando limitaciones de la gravimetría sola (no unicidad) y de la muografía (cobertura limitada, necesidad de supresión de fondo).

R. A. Martínez (UIS)

Mayo 2025

Showa-Shinzan

Nishiyama et al. (2014)combinaron datos muográficos y gravimetría en el domo *Showa-Shinzan*. Aunque el número de datos muográficos era bajo, la inversión conjunta logró resolver mejor la forma del conducto.

La corrección de desplazamiento c evitó subestimaciones de densidad en el método muográfico en relación con la gravimetría.



Figura: Perfiles de densidad en *Showa-Shinzan*, mostrando anomalías densas (H1, H2). [Nishiyama et al.(2014)Nishiyama, Tanaka, Okubo, Oshima, Tanaka, and Maekawa]

R. A. Martínez (UIS)

Puy de Dôme

Barnoud et al. (2021) presentaron un método robusto bayesiano de inversión conjunta, con corrección de desplazamiento automático y validación cruzada. Obtuvieron un modelo 3D consistente con estudios geológicos, revelando un núcleo trachítico más denso y taludes de menor densidad.



R. A. Martínez (UIS)

Muografía: Aplicaciones

31 / 37

Logros y desarrollo

- Mayor consolidación de la muografía como técnica de visualización de estructuras.
- Muografía: alta resolución somera (metros-decenas de metros).
- Gravimetría: cobertura volumétrica de la columna de roca.
- Integración conjunta: resuelve ambigüedad de profundidad y no-unicidad.
- Casos Iwodake y Asama: confirmación espacial y temporal de conductos magmáticos.
- Inversión conjunta bayesiana: muografía + gravimetría + sísmica.
- Detectores muográficos avanzados: discriminación de fondo.

Referencias I



L. . Alvarez et al.

Search for hidden chambers in the pyramids. sci. new series. 167, 832–839., 1970.

A. Barnoud, V. Cayol, V. Niess, C. Cârloganu, P. Lelièvre, P. Labazuy, and E. Le Ménédeu.

Bayesian joint muographic and gravimetric inversion applied to volcanoes. *Geophysical Journal International*, 218(3):2179–2194, 2019.



A. Barnoud, V. Cayol, P. G. Lelièvre, A. Portal, P. Labazuy, P. Boivin, and L. Gailler.

Robust bayesian joint inversion of gravimetric and muographic data for the density imaging of the puy de dome volcano (france).

Frontiers in Earth Science, 8:575842, 2021.

doi: 10.3389/feart.2020.575842.

Referencias II

P. G. Lelièvre, A. Barnoud, V. Niess, C. Cârloganu, V. Cayol, and C. G. Farquharson.

Joint inversion methods with relative density offset correction for muon tomography and gravity data, with application to volcano imaging.

Geophysical Journal International, 218(3):1685–1701, 2019.

S. Navas et al.

Review of particle physics.

Phys. Rev. D, 110(3):030001, 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.110.030001.

A. C. Neddermeyer SH.

Note on the nature of cosmic ray particles. phys. rev. 51, 884., 1937. URL doi:10.1103/PhysRev.51.884.

R. Nishiyama, Y. Tanaka, S. Okubo, H. Oshima, H. K. M. Tanaka, and T. Maekawa.

Integrated processing of muon radiography and gravity anomaly data toward the realization of high-resolution 3-d density structural analysis of volcanoes: Case study of showa-shinzan lava dome, usu, japan.

Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 119(2):699–710, 2014.

S. Okubo and H. Tanaka.

Imaging the density profile of a volcano interior with cosmic-ray muon radiography combined with classical gravimetry.

Measurement Science and Technology, 23(4):042001, 2012. doi: 10.1088/0957-0233/23/4/042001.

Particle Data Group.

Review of Particle Physics.

Prog. Theor. Exp. Phys., 2022(8):083C01, 2022.
doi: 10.1093/ptep/ptac097.
URL https://pdg.lbl.gov/.



M. Rosas-Carbajal, K. Jourde, J. Marteau, S. Deroussi, J.-C. Komorowski, and D. Gibert.

Three-dimensional density structure of la soufrière de guadeloupe lava dome from simultaneous muon radiographies and gravity data.

Geophysical Research Letters, 44(13):6743–6751, 2017.



A. Tarantola.

Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation.

Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005.

doi: 10.1137/1.9780898717921.

37 / 37